فـــكـــــــــر
الـفــضــاء

لجنة أصول المعرفة العلمية

رشدي راشد (منسّقاً)
بدوي المبسوط
حرية سيناصر
كريستيان هوزل
محمد البغدادي
نادر البزري

المنظمة العربية للترجمة

جيل غاستون غرانجي

فكر الفضاء

ترجمة

د. علي دعيبس

مراجعة

د. علي بلحاج

بدعم من صندوق الأوبك للتنمية العالمية

الفهرسة أثناء النشر - إعداد المنظمة العربية للترجمة
غرانجي، جيل غاستون
فكر الفضاء/ جيل غاستون غرانجي؛ ترجمة علي دعيبس؛ مراجعة علي بلحاج.
288 ص. - (أصول المعرفة العلمية)
بيبليوغرافيا: ص 273 - 280.
يشتمل على فهرس.
ISBN 978-9953-0-1280-3
1. العلوم - فلسفة. 2. الفضاء والوقت. أ. العنوان. ب. دعيبس، علي (مترجم). ج. بلحاج، علي (مراجع). د. السلسلة.
501

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات تتبناها المنظمة العربية للترجمة»

Granger, Gilles Gaston
La Pensée de l'espace

المنظمة العربية للترجمة
بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: 5996 - 113
الحمراء - بيروت 2090 1103 - لبنان
هاتف: 753031 - 753024 (9611) / فاكس: 753032 (9611)
e-mail: info@aot.org.lb - http://www.aot.org.lb

توزيع: **مركز دراسات الوحدة العربية**
بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: 6001 - 113
الحمراء - بيروت 2407 2034 - لبنان
تلفون: 750084 - 750085 - 750086 (9611)
برقياً: «مرعربي» - بيروت / فاكس: 750088 (9611)
e-mail: info@caus.org.lb - Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى: بيروت، كانون الثاني (يناير) 2009

المحتويات

القسم الأول
مفهوم «الأشكال» الهندسية

القسم الثاني
تراكيب

القسم الثالث
القياس والاعتلام

مقدمة

الفلسفة التي ليس لها أي علاقة بالهندسة ليست سوى نصف فلسفة، والرياضيات التي لا تستلهم الفلسفة ليست سوى نصف رياضيات[1].

1 ـ التفكير في الفضائية

1.1 ـ هل هناك فكرُ فضاءٍ؟ قطعاً، ما من أحد يشك في أن الفضائية حاضرة في جزء كبير من أفكارنا. إلا أن التقييم الجيد يُظهر أن ما يبدو لنا جلياً هو أننا نفكر في أشياء في الفضاء، ولكن إن كان فعلُ «فكر» يعني أنتج، فبأي معنى إذاً يمكن القول بأننا نفكر في الفضاء عينه؟ من الواضح أن السؤال الذي نطرحه هنا يمكن أن يظهر محلولاً دفعة واحدة من خلال رد الرياضيين، الذين ابتكروا منذ عهد بعيد من خلال التجريد، علم الأشياء في كونها في الفضاء. وهو يحمل منذ عهد الإغريق اسما خادعاً بعض الشيء، برغم أنه مبرر تاريخياً، إنه «الهندسة»، علم قياس الأرض؛ مع أن المقصود هو علم الفضاء،

(1) Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, 2 vols. [(Hamburg: Meiner, 1969-1976)], vol. 1, p. 293.

وفق ما تقوله لنا بعض القواميس[2]. إلا أن ما سنحاول التبصّر فيه في هذا المؤلَّف، إنما هو بالتحديد الطريقة التي يلتقط بها الحدس مفهوم الفضائية هذا بصورة مباشرة وقاهرة، مفهوما نجده مفصلاً ومتراتباً ومتنوعاً في المواضيع التصورية المجردة في معرفة متقنة الإعداد دائمة التقدّم، سنبيّن بأي معنى تَكون، حقاً فكرة الفضاء.

1.2 ـ إننا مع ذلك لن نستطيع تفادي الصعوبة الأولية الآتية: كيف يمكن الانتقال من فكرة الأشياء في الفضاء، مهما كانت هذه الأشياء موغلة في التجريد، كما هو حالها في الهندسة، إلى فكرة فضاء خالصة. هذه هي عقدة الجمالية المتسامية عند كَنْت : فالفضاء بالنسبة إلى فيلسوف **نقد الفكر المحض** ليس بشيء تصوّري بالمعنى الدقيق للكلمة.

«الفضاء هو تمثيل مسبق الوجوب عليه ترتكز كل ضروب الحدس الخارجيّ. لا يمكن أبداً أن نتصور أنه لا يوجد أي فضاء أبداً، حتى وإن كنا نستطيع أن نتخيل عدم وجود أي شيء فيه، فالفضاء إذاً يُعتبر شرطاً لإمكانية حدوث الظواهر (هذا ما يظهر في الإدراك الحسي)، وليس تحديداً يتعلق بها وهو تمثيل مسبق يستخدم بالضرورة أساساً للظواهر الخارجية»[3].

---

(2) وفق قاموس *Le Robert*: «علم الفضاء». والقاموس (*Oxford Dictionary*) يقول فجاءة بأقل وبأكثر وضوحاً، رغم أنه حصري جداً بالنسبة إلى المعنى الحديث للكلمة: «العلم الذي يدرس خصائص وعلاقات مقادير في الفضاء، كالخطوط والسطوح والمجسمات». علم المواضيع الفضائية بدل علم الفضاء.

(3) Immanuel Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, Herausgegeben von Raymund Schmidt (Hamburg: Felix Meiner, 1956), A. 24, B. 39, and *Oeuvres philosophiques*, bibliothèque de la pléiade; 286, 317, 332, 3 vols., édition publiée sous la direction de Ferdinand Alquié ([Paris]: Gallimard, 1980-1986), vol. 1: *Des Premiers écrits à la critique de la raison pure*, p. 785.

إن الفضاء بوصفه شرطاً للتفكير بالأشياء بالمعنى الخارجي، هو حدس «سابق لكل إدراك حسي بالشيء»، ومن دون أن يكون هو نفسه شيئاً. لكن لهذا الحدس خصائص، والهندسة بالنسبة إلى كَنْت هي «العلم الذي يحدَّد تركيبياً، ولكن مسبقاً، خصائص الفضاء»[4]. أن يسمح هذا الحدس الفضائي بإقرار خصائص الأشياء في الفضاء، هو ما ينسبه كَنْت لا لشكل ذلك الحدس عينه، بل للميزة البنائية التي تتمتع بها الرياضيات إجمالاً، والهندسة بصورة خاصة، والتي تتعارض مع الفلسفة.

يقول كَنْت: «مهما فكَّر الفيلسوف وأطال التفكير حول المتصوَّر البسيط لمثلّث، فإنّه لن يستنتج منه أي شيء جديد، في حين أنّ العالم بالهندسة، الذي يتطرق لهذه المسألة، سرعان ما يبادر برسم المثلث»[5].

إنّ ظروف ذلك البناء الحدسية هي التي تسمح له باستنتاج خصائص تصورية للمثلث، كمساواة مجموع زواياه لزاويتين قائمتين، فالرياضيات عند كَنْت تنظر إلى المتصوَّر في الملموس، في تحقيقه الحدسي الإفرادي، غير التجريبي مسبقاً، ومن ثم،

«ما يستنتج من الظروف العامة للبناء يجب أن ينطبق بصورة شاملة أيضاً على الشيء المبني»[6].

وهكذا يمكن القول إن جميع الخصائص الموضوعية للفضائيّة (المكانيّة)، بالنسبة إلى كَنْت، تنتقل إلى الظواهر، من خلال ترسيميّة بنائية، بحيث لا نستطيع أن نفكر في الفضاء عينه كموضوع،

---

(4) Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, B. 40.

(5) المصدر نفسه، A. 716, B. 744، ص 1300.

(6) المصدر نفسه، A. 713, B. 744.

(كشيء) بل بالخصائص الفضائية للأشياء فقط. ومع ذلك سنحاول أن نبيّن، بتفحّص بعض كائنات هندسية في تكوينها المثالي وفي بنيتها، كيف أن مواضيع الهندسة تطرح لنا فكرة الفضاء، من دون اعتبار الترسيميّة البنائية التي أنتجتها.

1.3 ـ فيلسوف آخر أشعر نحوه بمديونية مماثلة، كان قد عرض هو أيضاً صياغة كَنْتية لوضع الفضاء إلى حد ما، أو بالأحرى لانتفاء وضعه كموضوع فكر. إنه فتغنشتاين، كاتب **مبحث في منطق الفلسفة**.

نقرأ في 2.013:

«كل شيء هو إن جاز القول، في فضاء من حالات أشياء ممكنة. هذا الفضاء أستطيع تخيله خالياً، لكنني لا أتصور شيئاً من دون فضاء».

وفي المقطع 2.0131، الذي يشرح الحكمة السابقة نقرأ:

«الموضوع الفضائي يجب أن يوجد في فضاء لامتناه (النقطة الفضائية هي مكان خاوٍ يعوّض بمضمون).

من غير الضروري أن تكون بقعة في مجال النظر حمراء، ولكن يجب أن يكون لها لون: فلنقل إنّها تحمل حولها فضاء الألوان. الصوت يجب أن يكون له ارتفاع، الشيء الملموس يجب أن تكون له صلابة».

يجب أن نلحظ هنا استعمالين متشاركين ومتشابكين لكلمة «فضاء»، ففي 2.0131، يتعلّق الأمر قبل كل شيء بفضائية بالمعنى الخاص للإدراك الحسي أو لفكرة «موضوع فضائي»، لكن فتغنشتاين يرجعه فوراً إلى المعنى المجرد لعلاقة الاعتلام. النقطة الفضائية هي مكان خاوٍ (فارغ) يمكن أن يُشغل أو لا يُشغل في شبكة ما.

وبالضبط هذا هو المعنى المجرّد الذي يتمّ إبرازه في 2.013، حيث القول «بفضاء حالات من المواضيع». الفضائية بالمعنى الأول تكون، مع الوقت واللون، «شكل الأشياء»، (من دون شك ليس اللون كلون بعينه فقط، بل كممثل لكل صفة حسية، كارتفاع الأصوات) (2.0251). لكن كل صورة لوقائع في الكون، أي الموجودات من حالات الأشياء، ليست بهذا المعنى الحصري فضائية بالضرورة (2.182)؛ والحال أنها فضائية بالضرورة وفق المعنى الثاني، الذي هو مجازي في الجوهر. كلمة فضاء تدلّ عندئذ على منظومات مرجعية تكون فيها : الأشياء، والعناصر الثابتة لما هو موجود –حالات الأشياء، التوليفات الممكنة للأشياء – والوقائع، وجود حالات من الأشياء[7] قابلة للاعتلام. فضاء الوقائع، أو «الفضاء المنطقي» هو المرجعية الأساسية التي لا يمكن تفاديها لتمثّل الكون، والحقيقة، في كونها إمكانية وجود أو عدم وجود لحالات الأشياء (2.201). والمبحث بالكامل يتعلق بالطريقة التي تظهر بها هذه المرجعية، التي لا يمكن أن توصّف هي نفسها كموضوع.

بهذا المعنى، لا يمكن أن يكون الفضاء في المبحث موضوع تفكير. لا في معناه المجرد والمجازي، إذ إنّه لا يمكن أن يوصف، ولا في معناه الضيّق، لأن الشكل الفضائي يتمفصل بالقوانين التي تحكم بعض جوانب تمثيل حالات الأشياء، لكن هذه القوانين لا يمكن أن نتبيّنها إلاّ في قضايا زائفة. الفضاء ليس فكرة، بل شرط إمكانية بعض الأشياء:

---

(7) Gilles-Gaston Granger, «Le Problème de l'espace logique dans le Tractatus de Wittgenstein,» *L'Age de la science*, no. 3 (1968), repris dans: Gilles Gaston Granger, *Invitation à la lecture de Wittgenstein*, de la pensée. Domaine philosophique (Aix-en-Provence: Alinéa, 1990), pp. 37-259.

«فضائياً نستطيع أن نتصور جيداً حالة أشياء تتعارض مع قوانين الفيزياء، إلا أننا لا نستطيع تخيّل حالة من الأشياء تتعارض مع الهندسة»[8].

إذاً سيّان لدى كَنْت، صاحب **نقد الفكر المحض**، أو لدى صاحب **المبحث**، لا وجود لفكرة الفضاء، فالموضوع الحقيقي الوحيد للتفكير في هذه الحالة ليس بالنهاية سوى الوقائع.

1.4 ـ أول موضوع في تبصّرنا سيكون إذاً التوفيق، إن أمكن، بين فكرة الفضائية بوصفها تخطيطاً صورياً يخلو من فكرة الأشياء، وفكرة فضائية باعتبارها موضوع فكر بعينه. بالفعل يبدو لي أن الكائنات الهندسية هي مواضيع قائمة بذاتها. الهندسة ليست ميتا ـ اختصاص[9]، بمعنى أنها تعالج فقط علامات بسيطة تُستخدم في توضيح شروط تمثيل مواضيع مختصّة. بالتأكيد، المواضيع الهندسية، نظير جميع مواضيع الرياضيات، تقدّم للعلوم الأخرى بُنى صوريّة؛ لكن الهندسة تكون عندئذ ميتا ـ نظرية، مع مواضيعها الخاصة، من الدرجة الثانية. ما هي طبيعة هذه المواضيع، ما هي المحتويات، غير التجريبية (الاختبارية)، بل وفق عبارة كنا قد طرحناها سابقاً، المحتويات الصورية[10] التي تكوّن واقعها؟ هذا سيكون الموضوع

---

(8) Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, bibliothèque de philosophie, trad. préambule et notes de Gilles Gaston Granger ([Paris]: Gallimard, 1993), 3.0321.

(9) Gilles-Gaston Granger, «Que es una metadisciplina,» *Dianoia*, vol. 32 (1983), pp. 103-118, repris en français: «Qu'est-ce qu'une métadiscipline?» dans: Gilles-Gaston Granger, *Formes, opérations, objets*, mathésis; ISSN 1147-4920 (Paris: J. Vrin, 1994), pp. 111-127.

(10) «La Notion de contenu formel» et «Contenus formels et dualité,» dans: Granger, *Formes*, *opérations*, *objets*, pp. 33-52 et 53-73.

الثاني المنطوي تحت دراستنا لفكرة الفضاء.

قبل أن نطوّر هذين الموضوعين المتشابكين أثناء تحليلاتنا، يجدر بنا أن نحدّد موضوعنا من خلال تخطيط أوّلي لأوجه ثلاثة، آخرها فقط سيكون موضع اهتمامنا في هذا المؤَّلف. بالفعل يمكن النظر في مسألة فكرة الفضاء كتحديد تصوّري للخصائص الفضائية للإدراك الحسي، وكبناء نموذج مجرد للفضاء المدرك حسياً. والمقصود عندئذ، يكون نظرية سيكولوجية تجريبية (اختبارية) في جوهرها. لكن القضية نفسها يمكن أن تطرح كقضية نظرية للإطار الفضائي للظواهر الفيزيائية، التي لا تدرك مباشرة بالحسّ عند تحويلها إلى مواضيع علم. والمقصود في هذه الحالة هو مبحث نقدي في مبادئ العلوم الفيزيائية وفي أصولها المنطقية (إبستيمولوجيا الفيزياء) أو عند الاقتضاء نظرة إلى الفضائية من وجهة ميتافيزيائية صرفة. وفي النهاية، ستشغلنا المسألة الوحيدة التي هي مسألة طبيعة التصوّر الرياضي للفضاء، مأخوذاً كما هو، في استقلاليته كموضوع مجرّد. ونودّ تقديمه وفق الحركتين اللتين حكمتا تكوّنه خلال التاريخ التصوّري للرياضيات، فوفق إحداهما الفضائية موضوع رياضي يعطى كمتصوَّر «طبيعي»، بمعنى سيكون علينا شرحه[11]. التمفصل الداخلي للتصوّر سيقدَّم حينئذ في كونه محصلة، في وحدة مفهوم للفضاء. ووفق الحركة الأخرى، يطرح المتصوَّر مفكّكاً ومنظّماً ومتراتباً في مستويات ووجهات نظر صوريّة بواسطة تبديه. من الواضح، أن الحركتين لا تتعارضان إطلاقاً، وغالباً ما تلازمتا أثناء تطوّر المتصوَّر (المفهوم).

(11) Gilles-Gaston Granger, «Sur l'idée de concept mathématique «naturel»,» *Revue internationale de philosophie*: (1988), repris dans: Granger, Ibid., pp. 157-182.

ولكن لنستبعد قبل كل شيء وجهي القضيّة اللذين لن نقوم بتفحّصهما.

2 ـ الإدراك الحسّي والهندسة

2.1 ـ لنعرض، بداية، وبإيجاز، وجهاً من قضيّة الفضاء يبين علاقة هذا الأخير بالإدراك الحسي. سنميّز في ذلك بين مسألتين، إحداهما تتعلق بالبحث عن ضروب الحدس الأصليّة التي تؤسس لعلم الهندسة، انطلاقاً من ظروف إدراكنا الحسي للكون. لنأخذ كمثال بهذا الخصوص نصّ هوسرل حول أصل الهندسة، التي يعرّفها، ليس من دون شيء من اللّبس، كمجموعة «من العلوم تعالج الأشكال الموجودة رياضياً في فضاء زماني بحت»[12].

إن القضيّة التي يطرحها هوسرل هي عندئذ قضية «إعادة الحيوية» إلى المعنى الأصلي للمفاهيم التي تكوّن موضوع هذه الهندسة، معنى قد تكون حجبته حضارتنا الحالية بسبب المعالجة المنطقية في جوهرها للمعارف التي تروّج لها، وفاعلية تطبيقاتها عملياً. وبالنتيجة أليست ضروب الوضوح الأوّليّة وفق هوسرل هي ضروب الوضوح في مسلّماتنا، «لأن المباده هي في المبدأ النتائج المسبقة لبناء المعنى الأصلي التي تبقى دائماً ماثلة خلفها»[13]. غير أنّ التطوّر الحاصل في علم منظم منطقياً ربما أخفى ضروب الحدس الأصلية، التي يقترح الفيلسوف علينا العودة إليها. ويجب أن تكون تلك العودة تاريخية، حسب رأيه، نظير إعادة اكتشاف تقليد

(12) Edmund Husserl, *Shorter Works*, Edited by Peter McCormick and Frederick A. Elliston (Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press; Brighton, Sussex: Harvester Press, 1981), p. 255.

(13) المصدر نفسه، ص 262.

محجوب، إن لم نقل ضائع. لكن هوسرل لم يقدّم لنا في هذا النصّ أي مثال لهذه العودة إلى الأصول، ويمكن أن نخمّن فقط بأنها، برغم تصريحاته المصرّة على التاريخية، لم تكن سوى علم الظواهر لوعينا بالفضاء. ولا نستلم ههنا إلا نتائج متواضعة ممّا قام به من عمل، وصفاً موجزاً لعالم شبه علمي لمؤسسي الهندسة، وصفاً يختصر من خلال العلامات الآتية:

أ ـ هذا الكون يجب أن يكون كوناً من الأجسام بأشكال فضائية زمانية وبميزات حسيّة (هوسرل يقول: «مادية»).

ب ـ من بين هذه الأشكال، يتميّز البعض بفائدته العملية: «سطوح أكثر أو أقل صقلاً، أضلاع أكثر أو أقل خشونة أو انتظاماً، وبكلام آخر، خطوط أكثر أو أقل تجريداً، زوايا أكثر أو أقل كمالاً»[14].

ج ـ ندخل طرائق قياس من أجل تحديد تلك الأشكال بدقّة.

د ـ نجعل هذه الأشكال مثالية انطلاقاً من ممارسة إتقانها المادي: صقل للسطوح وتقييم أدق للمقادير.

هدفي هنا ليس نقداً إضافياً لضعف بحث ظواهري بحت كهذا في المتصوّرات الفضائية، فهو في الآخر بحث في ملامحه الأولى. ومع ذلك يبدو لي من المهم أن نعترف، بهذا الخصوص، بأن الادعاء بالحصول على وقائع «تاريخية» من خلال تحليل الإحساس لا يستطيع أن يمكّننا إلا من فهم جد محدود لهذه المتصوَّرات، إذ إن تحليل نتاج العلم هو وحده الكفيل بالذهاب بنا بعيداً.

2.2 ـ المثال الثاني الذي نريد تقديمه حول وضع قضية الفكر

(14) المصدر نفسه، ص 268.

الفضائي في علاقتها بالإدراك الحسي يشهد على رؤية تتعارض كلياً مع رؤية القائلين بالظواهرية، فالمقصود إذاً هو إنشاء نموذج رياضي للإدراك الحسي بالفضاء، يقترح «كفضاء للإدراك الحسي»، مقابل فضاء خارجي «حقيقي» لمنبّهات عالم الفيزياء. وسنستعيره من مقالة أ. جونكير، الذي استوحى من أعمال ليونبورغ التجريبية حول الرؤية بعينين اثنتين[15]. وعندئذ ينظر السيكولوجي في فضاء المنبّهات نفسها، معتبراً إياه، على نحو ما، هدفاً، حيث يسلّم بأنه إقليدي. وسنعرض لمقارنة القياسات المجراة على أشياء هذا الفضاء وفق الطرائق المألوفة مصحوبة بالأحكام التي يطلقها إنسان على المقادير التي يدركها حسياً. كي يقارن السيكولوجي منظومة هذه الأحكام مع البنية الإقليدية لفضاء المنبّهات، يجب أن يسلم مسبقاً بمتريّة تخمينية لفضاء الإدراك الحسي هذا. تسليماً، تدعمه اعتبارات التجانس في الإدراك الحسي البصري وتواصل التغييرات الصغيرة في الأبعاد المدركة حسياً، هو تسليم بفضاء ريماني ذي تقوّس ثابت. ويجب عليه عندئذ أن يفترض «دالّة مسافة للقياسات النفسية تقيس قيمة المسافة المدركة حسياً والمخمّنة من خلال الارتباط بالمسافة الإقليدية المقيسة في الفضاء «الحقيقي» وتنبع صيغة هذه «المسافة للقياسات النفسية» من البنية الريمانية المسلّم بها وعن تقوسّها بصورة خاصّة، فالقضية عندئذ هي أن نتخيّل أوضاعاً تجريبيّة تمدنا بأحكام عن المسافة الفاصلة بين نقاط ضوئيّة تسمح بتأكيد أو دحض الفرضية الريمانية. وبواسطة جملة من التخمينات التجريبية على العلاقة بين تقدير المسافة والتقارب البصري، تسمح النتائج التجريبية بأن نحسب بمقاربة ملائمة تقوّس الفضاء الريماني للإدراك

(15) A. Jonckeere, «Géométrie et perception,» *Etudes d'épistémologie génétique*, vol. 5 (1958), pp. 109-147.

الحسي، تقوساً سيوجد سلبياً، هذه الهندسة هي إذاً لوباتشفسكيّة.

إن لمثل هذا التشكيل الرياضي للفضاء المدرك حسيّاً بالتأكيد مدى محدوداً. يفترض قبل كل شيء أن هذا البناء هو متري، ولا يقول شيئاً عن بناء لا يدخل مسافة. من ناحية أخرى يسلم بأن هذا التنظيم يمكن أن يعبّر عنه في إطار ريماني، ويطرح استتباعاً قاعدة للمقابلة بين تقديرات المسافة والمسافات «الحقيقية»، ترتبط كيفياً بهذه الفرضية. ومهما تكن إغراءات هذا البناء بخصوص دراسة تجريبية للإدراك الحسّي البصري، نرى أنه لا يستطيع أن يقدّم توضيحات ذات معنى بخصوص قضيتنا، في الفكر الفضائي. لأنه يفترض مسبّقاً وبطرائق مختلفة تفكيراً رياضياً في الفضائية، فضاء إقليدياً حقيقيّاً للمنبّهات، وفضاء ريمانياً لتقديرات المسافة. ولنلاحظ فقط أن نفس القضية في التمثيل الرياضي للفضاء المُدرك حسياً كانت قد حلّت، في حالة خاصة هي التمثيل المسطحّ للفضاء ثلاثي الأبعاد من خلال فن الرسم، ومن وجهة نظر إنتاج وهم، في القرن الخامس عشر، على أيدي مبتكري «الرسم المنظوري».

3 ـ الفيزياء والهندسة

3.1 ـ وجه ثانٍ رئيسي في قضية الفضاء سوف لن نقوم بنقاشه هو وجه العلاقة بين الهندسة والفيزياء. إذا كانت الهندسة تقدّم جزءاً من إطار تمثيل المواضيع الفيزيائية، فنستطيع أن نسأل بصورة عامة جداً تحت أي شروط يمكنها أن توفّي بهذه الوظيفة، فتبرز بالتالي بعض أهم اللامتغيرات الأساسية لما يمكن أن تكونه مواضيع الكون. المسألة المطروحة على هذا النحو تربط من دون شك بين وجهتي النظر اللتين لم يفصل بينهما الفلاسفة والرياضيون اللذين سنستشهد بهم بصفة حقيقية، رغم التمييزات الكَنْتية التي رجع إليها بعضهم، فمن ناحية، المقصود هو أن نبرز في الهندسة شروط تناول المواضيع

كظواهر، ولكن من ناحيةٍ أخرى هو أن نكتشف في الهندسة أيضاً شروط وجود الأشياء عينه ككائنات فيزيائية، على الأصح شروط إمكانية تحركها ولاتغيّرها في تلك الحركات. ذلك هو الهدف المزدوج الذي يسعى من خلاله أمثال ريمان وهيلمهولتز ولي وبوانكاريه إلى طرح معنى للهندسة كإطار لعالم فيزيائي.

توضيح الشروط المطلوبة من الهندسة بهذا الخصوص، يفرض طبيعياً ـ وقبل كل شيء ـ الاعتراف بأنماط التجريد التي تستوجبها الهندسة بالضرورة تجاه الكون المحسوس، ففي مقالة على «الاصطلاحية الهندسية»[16]، يرقّم ج. فيلمان ثلاث عمليّات تجريد تمهيدي في اختيار هندسة:

أ ـ فصل الشكل عن محتوى التجربة، التمييز بين تغيرات الموقع وتغيرات الحالات.

ب ـ فصل منطقة الفضاء التي يمكننا بلوغها عن الفضاء مأخوذاً بكليته.

ج ـ الاختيار من بين فئات الحركات الصلبة (الجاسئة) المتلائمة مع التجربة، تلك التي هي أبسط رياضياً[17].

عند قبول هذه التجريدات، تظهر هندسة هي في نفس الوقت تعبير عن أشكال إدراك المواضيع الفيزيائية، وكموضوع جديد مختصّ، يتمتع ببعض الخصائص هو الفضاء. والقضية المطروحة من قبل هيلمهولتز ولي هي عندئذ أن نبيّن كيف أن تلك الخصائص هي

---

(16) *Science et métaphysique: Colloque de l'académie internationale de philosophie des sciences, [Fribourg, 12-15 septembre 1973]*, bibliothèque des archives de philosophie. Nouvelle série; 22 (Paris: Beauchesne, 1976), pp. 65-105.

(17) المصدر نفسه، ص 93.

بالضبط الخصائص التي تجعل حركات جسم فيزيائي ممكنة، أي في هيئته المجردة، لكنها قريبة بما يكفي من مواضيع تجربتنا، على غرار «الجسم الصلب». قضية بوانكاريه في **قيمة العلم**[(18)] ليست بالضبط صياغة الشروط المسبقة لبناء فضاء هندسي، بل هي بالأحرى أن نصف كيف أن التجربة تحدد ضروب التمثيل الممكنة من خلال هندسة أشياء في الكون ندركها حسياً انطلاقاً من انطباعات بصريّة وعضليّة. وبالنتيجة لا يستطيع نمط تنسيق هذه المنظومة من الانطباعات البتّ بصورة أحادية الدلالة بطبيعة هندسة ملائمة. ولا يمكن إلا أن يوحي لنا باختيار تمثيل مناسب، تمثيل يختصر إلى الحد الأدنى عدد «اللمسات الأخيرة» التي يجب أن نوليها نتائج التجربة لكي نجعل الهندسة ملائمة[(19)].

3.2 ـ نقطة الانطلاق في تنسيق انطباعاتنا حسب بوانكاريه هي مفهوم «المتواصل اللاشكلي»، أي مفهوم مجموعة من الانطباعات، إذا كان الانطباع A والانطباع B يقبلان التمييز فيها، فهناك انطباعات أخرى C، قابلة للتميز في نفس الوقت عن A وعن B. ومن هنا ينتج متصور عدد الأبعاد في تلك المتواصلات، فإذا كان متواصل، نسميه عندئذ «قاطعاً»، يقسم متواصلاً يحتويه قسمين، بحيث لا يمكن الانتقال انتقالاً متواصلاً من أحدهما إلى الآخر من دون المرور به، قلنا إن للمتواصل المقسوم بعداً واحداً أزود عما لدى القاطع. وإذا قسم قاطع متتالية متواصلة من الانطباعات قسمين هو أحد عناصرها، فإن بُعد المتتالية هو 1. وبالتواتر، يمكن إذاً أن نخصّ كل متواصل بـ «بعديّة». إلا أن للتجربة القول الفصل في إقرار بعديّة

(18) Henri Poincaré, *La Valeur de la science*, science de la nature ([Paris]: Flammarion, [1970]), chaps. III et IV.

(19) المصدر نفسه، الفصل الرابع، الفقرة الخامسة، ص 125.

المتواصل من الانطباعات الفعلية المسمى من قبل بوانكاريه «بالمتواصل الفيزيائي»، مثل متواصل من الانطباعات البصرية أو العضلية. والقضية لدى بوانكاريه هي عندئذ في اختيار متواصل فيزيائي.

«يكون متكافئاً إن جاز القول مع الفضاء [الهندسي]، بحيث يقترن بكل نقطة في الفضاء عنصر في ذلك المتواصل، وبخصوص النقاط في الفضاء القريبة جداً بعضها من بعض تقترن عناصر لا تقبل التمييز»[20].

وسيكون للفضاء الهندسي بعديّة ذلك المتواصل الفيزيائي نفسها.

المفهوم الأساسي الآخر هو مفهوم الحركة، فمن بين التغييرات، تغييرات تدرك حسياً كداخلية مقصودة، وهناك أخرى خارجية غير مقصودة. وبعض هذه الأخيرة يمكن أن «تصحح» من خلال تغيير داخلي مقصود يعيد الانطباعات الأصلية. يطلق بوانكاريه على هذه التغييرات الخارجية عبارة «انتقالات»، بمعنى انتقال شيء خارجي، فنستطيع أن نتخيّل عندئذ متواصلاً فيزيائياً يتشكّل من تلك الانتقالات ومن بين هذه انتقالات لا تتمايز عن بعضها. مجموعتها تتمتع بالخصائص الصوريّة لزمرة رياضية[21]، وهذه الزمر من الانتقالات التجريبية هي التي ستستخدم كصور متناهية جزئية بخصوص التمثيل في فضاء مجرّد لامتناه. عندئذ يجب التحقّق ممّا إذا كانت مختلف المتواصلات الفيزيائية ـ كمتواصلات الانطباعات البصرية ومتواصلات الانطباعات العضليّة ـ يمكن اعتبارها تقريبياً متطابقة. وإذاً لنا الحق في أن نفكر بالمواضيع ونَصِف ونتوقّع مواقعها

(20) المصدر نفسه، ص 98.

(21) تركيب عدة إزاحات هو إزاحة، لكل إزاحة عكس يصحّحها، وتوجد إزاحة محايدة تترك الانطباع على حاله.

في فضاء هندسي، غالباً ما تتقيّد به تجاربنا على المتواصلات الفيزيائية. وهكذا يظهر بالنسبة إلى بوانكاريه متصوّر الزمرة كالمتصوّر الرياضي الأوّلي الذي يجعل تمثيل الأشياء وحركاتها في الفضاء ممكناً.

3.3 ـ اقتبس هيلمهولتز[22] ـ وقد تأمّل مقالة ريمان المؤسسة[23] «حول الفرضيات التي تؤسّس الهندسة» ـ العنوانَ، لكنه استبدل كلمة «فرضيات» «بوقائع». وفي حين كان ريمان يطرح شبكة مجردة لاعتلام الأشكال وحركاتها في الفضاء: الشكل التربيعي ds^2 الذي تخضع له التغييرات اللامتناهية في الصفر في إحداثيات نقطة متحركة، أراد هيلمهولتز أن يثبت بأن شكل هذه الشبكة عينها هو الشرط اللازم لإمكانية حركة الأشكال الصلبة في الفضاء. هذه الشروط هي بذلك إذاً، بالنسبة إلى الأشياء الحقيقية، وقائع وليست «فرضيات» أو اصطلاحات تمثيلية، فهيلمهولتز يسعى فعلاً إلى تحديد «أي طروحات في الهندسة تعبّر عن حقائق ذات معنى وقائعي»، أو أن: «لها، بتجرد، معنى قائماً»[24].

---

(22) Hermann von Helmholtz, «Ueber die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie», 1866-1869, *Wissenschafliche Abhandlungen*, 2ter Band (1883), pp. 610-618, and «Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen», 1868, *Wissenschafliche Abhandlungen*, pp. 618-640.

(23) «Ueber die Hypothese, Welche der Geometrie zum Grunde liegen», 1854, in: Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, hrsg. unter Mitwirkung von Richard Dedekind, von Heinrich Weber, 2. Aufl., bearb. von Heinrich Weber (Leipzig: B. G. Teubner, 1892).

(24) Helmholtz, «Ueber die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie», 1866-1869, pp. 610-618.

يعتمد هيلمهولتز قبل كل شيء التجريد الأساسي الريماني لتمثيل فضاء من خلال «تعدّدية تمتدّ n مرّة»، حيث تتعرّف كل نقطة من خلال قيم عددها n لمقادير إحداثيات عددها n، مستقلة ومتواصلة، وهذا افتراض يكوِّن أول مسلمة لتواصل الحركات في الفضاء. والضرورة الريمانية عندئذ هي أن يقارن طولاً كل خطّ يصل بين نقطتين مع آخر، باستقلالية عن موقع النقطتين واتّجاه المقطع الذي يصل بينهما. ولهذا الغرض يجب تحديد العنصر الخطي اللامتناهي في الصغر ds في ارتباطه بمفاضلات لإحداثيات المتحرّكة، وريمان يضع عندئذ فرضية ـ الشكل التربيعي للكمية ds^2[25]. أبسط الفرضيات التي توفّي المستلزم، لكنها ليست الوحيدة الممكنة. ما يريد هيلمهولتز إثباته، هو أن هذه الفرضية هي في الواقع الوحيدة التي تجعل حركة شكل حرّ صلب ممكنة، من دون تغيير هيئته[26]، وأنها بهذا المعنى «واقع» لازم.

هو يعرّف، كمسلّمة ثانية، مفهوم الصلابة (الجساءة) في تعدّدية بعدها n، أي المفهوم المجرد لجسم صلب لامتغير، فبين الإحداثيات التي عددها 2n لزوج من النقاط، باعتباره شكلاً صلباً أوّلياً، هناك معادلة، هي نفسها بخصوص كل الأزواج المتطابقة، ويبيّن أنّ وجود معادلة مميّزة للشكل الصلب كهذه ليس تافهاً، فمما يعني إثباتاً لاستقلال الوجود المجرد للأشكال الصلبة في التّعدديّة.

أدخل هيلمهولتز مسلّمتين أخريين، إحداهما هي «الانتقاليّة الحرة»: أي أنّ لكلّ نقطة في الفضاء الحريّة في أن تأخذ بتواصل مكان أي نقطة أخرى، من دون قيد سوى قيد جساءة الشكل.

(25) المصدر نفسه، ص 620.

(26) المصدر نفسه، ص 621.

والمسلّمة الثانية هي «وحدانية المسير»، وتقضي بأن جسمين صلبين متطابقين يظلّان بعد الدوران متطابقين. ويشدّد هيلمهولتز على نحو أعم بأن «استقلالية التطابق بالنسبة إلى الموقع في الفضاء وإلى توجّه الأشكال المترادفة، وإلى مسار النقل، هي الواقع الذي ترتكز عليه قابليّة قياس الفضاء»[27].

لكي تكون هذه المسلّمات الأربع مستوفاة، يبرهن هيلمهولتز على أن هيئة أي عنصر خطي ds في الفضاء يجب أن تكون بحيث يأخذ مربّعه ds^2 شكلاً تربيعياً على مفاضلات الإحداثيات، بالتوافق مع فرضيّة ريمان، التي بمقتضاها، في صياغة هيلمهولتز، «يوجد عبارة متجانسة من الدرجة الثانية بين مفاضلات (الإحداثيات) لا تتغيّر، في كل حركة نقطتان ترتبطان بصلابة، منفصلتان بمسافة تؤول نحو الصفر»، ففرضية ريمان بالنسبة إلى هيلمهولتز هي إذاً لازمة. لكن هذا الأخير يدوّن بأن هذه المتطلّبات تميّز فضائية بمعنى عام جداً في حالة تقوّس ثابت للفضاء. إذا ضممنا اليها تثبيت الأبعاد الثلاثة ولانهائية الفضاء، تحدّد الفضاء الإقليدي «الحقيقي» على نحو كامل.

نرى أن تحليل هيلمهولتز للعلاقة بين الهندسة، كبنية للفضاء، وبين الفيزياء، يرتكز على إظهار شروط الحركة اللامتغايرة للأجسام الصلبة المجردة. ما هو معنى المسلّمات الأربع المذكورة؟ بالتأكيد، هي تميّز جيداً الموضوع «فضاء» كنوع من تعدّدية من بعديّة n، لكنها ليست تماماً على غرار تبديه الفضاء، كما فعل هيلبرت في العام 1899 على سبيل المثال، لأنها تجعل المفهوم الحسّي أصلاً، لحركة جسم صلب، الذي هو نمذجة مباشرة لواقع فيزيائي، يلعب دوراً أساسياً. والحال أن روح التبديه الحقيقي ترتكز بدلاً من ذلك على

---

(27) المصدر نفسه، ص 639.

إفراغ متصوّرات المواضيع من كل محتوى، بهدف أن لا تبرز إلا العلاقات. ومع ذلك سيكون من الخطأ الفادح أن نعتبر أنّ المسلّمات الأربع ناجمة عن طبيعة تجريبية، بل هي تصوغ متطلّبات تحكم فضائية تتلاءم مع الحركات الممكنة (أو بالأحرى المفترضة) لجسم صلب مجرد. منظومة هذه الحركات هي ما سوف يبرز من منظور أكثر تجريداً عند سوفيوس لي، الذي وضّح مفهوم الزمرة كأساس للهندسة، فكرة طُوّرت لاحقاً في برنامج أيرلنجان لفليكس كلين (1923 ـ 1921) الذي سوف نشتغل عليه في الفصل الثاني.

4 ـ متصوّر الفضائية الرّياضي

4.1 ـ لكن ما نودّ معالجته هو المتصوّر الرياضي المحض للفضائية، من دون أن ننكر إطلاقاً أهميّة وفائدة التفكير في علاقات الفضائية مع الإدراك الحسّي وبناء مواضيع الفيزياء، وسنحاول أن نحدّد بدقّة ما يمكن أن ينعت بالفضائي، في مواضيع الرياضيات. لا تبدو لنا هذه الفضائية الرياضية حصراً متماثلة مع ما يقدّم كفضائي في الإدراك الحسّي للكون، فهي ترسم بخصوص الموضوع قيوداً أعمّ، فيمكن أن تستخدم فعلياً أساساً في بنى توضيع كون فيزيائي من خلال علم التجريب، لكنها مع ذلك لا يمكن أن تقتصر على هذا التوسّع بالذات. قد نستطيع القول، مسترجعين بلا حقّ مصطلح كَنْت، بأن رياضيات الفضائي تطوّر جماليّة متسامية لأكوان وهميّة، أو من الأفضل لأكوان افتراضيّة بحتة، إذا أردنا استبعاد الإيحاءات العاطفية للنعت الأول. لكن المقصود هو وضع متصوّرات (مفاهيم) لهذه الأشكال، لا ترجمة شروط تحقيق واضح لها، بحيث إن كلمة جماليّة لا يمكن أخذها هنا بالمعنى الكَنْتي. وسنرى أنّ هذه التصوريّة (أي وضع المتصوّرات) تجري بالأساس من خلال منهجة جملة من العمليات، وسيشمل عملنا في هذه المحاولة وفي المقام الأوّل التحديد

الدقيق لتلك العمليّات وترتيب بنائها حتّى نميّز الفضائيّة الرياضيّة.

قد يتبادر إلى الذهن أن التشكيل التبديهي لمتصوّر الفضائي، الذي بدأه إقليدس، وجدّده هيلبرت وآخرون، يفي بالغرض تماماً ويجعل محاولتنا الفلسفية غير ذات جدوى، فنودّ أن نبيّن أوّلاً أن لا شيء من ذلك حاصل، وأن نوضّح هكذا مقولتنا.

4.2 ـ سأعرض إذاً بإيجاز تبديه هيلبرت[28] بقصد إبراز معناه.

قصْد الرياضي الكبير هو القيام بتحليل منطقي لأسس الهندسة الإقليدية، يبدو في الظاهر أنه شرع فيه إن لم يكن أنهاه، في ذهنية كَنْتية، ذلك أنّه قال إنه لا بدّ من اعتماد تمثيلات حدسية[29]، وإن الفضائية ككل، كموضوع رياضي «لا يمكن أن تبنى على المنطق وحده، فهي في حاجة إلى «معطى ضروري يتكوّن من مواضيع ملموسة»[30]. مع ذلك، ما يعالجه مباشرة التنظيم التبديهي هو «علامات». ذلك هو المعنى المخفّف لتصويغ هيلبرت؛ فمتصوّرات المواضيع الفضائية هي تماماً متصوّرات مواضيع، لكن هذه المواضيع ليست هي مباشرة مواضيع التجربة، إنها علاماتها. لهذا السبب افتتح كتاب **الأسس** بالتعريف الشهير:

«نفكر بثلاث منظومات من المواضيع ؛ نسمّي مواضيع المنظومة الأولى نقاطاً. . .؛ ونسمّي خطوطاً مستقيمة مواضيع المنظومة الثانية. . .؛ ونسمّي مسطّحات مواضيع المنظومة الثالثة»[31].

---

(28) *Grundlagen der Geometrie*, 1899, Suivi de nombreuses rééditions complétées par Hilbert. Nous citerons d'après l'édition critique par Rossier de la traduction Laugel. (David Hilbert, *Les Fondements de la géométrie*, éd. critique avec introd. et compléments préparée par Paul Rossier (Paris: Dunod, 1971)).

(29) المصدر نفسه، ص 260.

(30) المصدر نفسه، ص 261.

(31) المصدر نفسه، ص 11.

إن المفاهيم الهندسية للمواضيع الرياضية التي ننطلق منها لا تتحدّد كما هي إذاً إلاّ من خلال العلاقات المتبادلة التي تعبّر عنها المباده. ونحن نعلم أنّ هذه الأخيرة تنقسم إلى خمس مجموعات: الانتماء، الرّتبة، التطابق، التوازي، التواصل. وليس هنا مجال التعليق على كل واحدة من هذه الزمر. وسنقتصر على ملاحظتين تتعلّقان بالخاصّية العميقة لمتصوّرات هيلبرت.

الأولى تعود إلى (مباده الترتيب)، التي تعطي معنى عملياتيّاً للتعبير «هو بين»:

II.1 ـ «إذا كانت النقطة B بين النقطة A والنقطة C، كانت النقاط الثلاث منتمية إلى نفس المستقيم، وتكون B أيضاً بين C وبين A».

II.2 ـ «بخصوص نقطة معيّنة A ونقطة معيّنة C، يوجد على الأقل نقطة B تنتمي إلى المستقيم AC بحيث إن C هي بين النقطة A والنقطة B».

II.3 ـ «من بين ثلاث نقاط على مستقيم لا يوجد إلا واحدة بين النقطتين الأخريين».

II.4 ـ (باخ). يتكافأ مع: إذا كان خطّ مستقيم يقطع ضلع مثلث فإنّه يقطع ضلعاً ثانياً.

إن هذه المباده. مضافة إلى مباده الانتماء، تحدّد جزئياً متصوّر الموضوع «المستقيم»، وستكمّله مباده التطابق من III.1 إلى III.3، ومبده التوازي ومباده التواصل والتماميّة، التي ستكوّن موضوع ملاحظتنا الثانية. ونرى على مثل الخطّ المستقيم هذا أنّ الطريقة التبديهيّة لتوصيف المتصوّرات ترتكز على صياغة العلاقات بين المفاهيم المدخلة خالية من المعاني في البدء، علاقات تتوافق

دائماً مع عمليّات ضمنية أو ظاهرة تقام على تلك المواضيع. ويترتّب عنها لاتمييز المواضيع فقط، بل كذلك وعلى مستوى أعلى، تحديد منظومة الهندسة بالذات، فمباده الترتيب، على سبيل المثال، مأخوذة كما هي، لا يمكن أن تكون صالحة إلا في منظومة يوجد فيها مفهوم المستقيمات غير المتقاطعة، فتقصي بناء عليه الهندسة الإسقاطية.

ملاحظتي الثانية تتعلّق بمبده التماميّة V.2 ويفترض هذا المبده، الذي لم يظهر في أشكال مختلفة إلاّ في الطبعة الثانية من **الأسس**[32]، أن مجموعة نقاط المستقيم (ثم كذلك مجموعة مستقيمات الفضاء ومسطحاته) المستوفية للمباده الأخرى، غير قابلة للتوسّع. قال هيلبرت في ملحوظة لاحقة[33]، «لا وجود لطبيعة هندسيّة بحتة». هو مبده يعود فعلاً إلى ميتا خاصية في المنظومة، منطقيّة الطابع، مستقلة عن النوعيّة الهندسيّة للمواضيع. تؤكِّد خاصية إقفال منظومة هذه المواضيع المعرّفة من خلال التبديه. ومع ذلك، وبرغم أنها لا تنجم إطلاقاً عن مباده أخر، فهي مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بخاصّية ذاتيّة لمحتوى المستقيم، عبّر عنها مبده أرخميدس، مبده سماه هيلبرت مبده القياس، فبنقل مقطع معيّن عدداً من المرّات، نستطيع تخطّي أي مقطع آخر. وبضمّ مبده التماميّة إلى مبده القياس هذا، نتمكّن من البرهنة على الخصائص التي يقول عنها هيلبرت إنها خصائص «تواصل» المستقيم: وجود منتهيات مشابهة للمنتهيات العدديّة لقطوع ديديكند، ومبرهنة بولزانو على وجود نقاط تراكم في

(32) انظر التعليقات لـ: Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, introduction de Jean-Toussaint Desanti; préface de Henri Cartan ([Paris]: Hermann, 1981), chap. 2, pp. 61-90.

(33) Hilbert, Ibid., p. 43.

قطعة محدودة. وعلى نحو عام، «إنّ مبدهي الاستمرار» يجعلان التراسل واحدة لواحدة بين نقاط المستقيم والأعداد الحقيقية ممكناً. وبذلك تصبح إمكانية تمثيل المواضيع الهندسيّة من خلال الأعداد قائمة، وكذلك الرّبط بين الفضائي وعلم الحساب. على أننا نستطيع الحصول على هذه النتيجة متجنّبين ذكر ميتا مبده التماميّة، بإدخال مبده كانتور العامل على المواضيع عينها: كل متتالية من قطوع مغلقة متغالفة، وآيلة نحو الصفر، تتضمّن نقطة منتمية إلى جميع القطوع. غير أن هذا المبده يصاغ بلغة من الرّتبة الثانية مكمّماً بخصوص مجموعات النقاط. والعالمون بالمنطق في يومنا هذا يعرفون أن هذا هو الثمن الواجب دفعه للحصول من الدّاخل تقريباً على أحاديّة الدلالة لمنظومة من المواضيع المعرّفة من خلال التبديه: إذ أي تبديه من الدرجة الأولى لا يمكن أن يحدّد بدقّة وبصورة أحاديّة الدلالة نموذجاً لبنية نقاط المستقيم (أو لحقل الأعداد الحقيقية R)[34].

4.3 ـ لنعد لحظة إلى توكيد الإقفال المصاغ من خلال ذاك المبده، فوجود أو انتفاء مثل هذه الخاصيّة يطرح قضيّة أساسيّة في الطريقة التبديهية. كيف نضمن وجود وحدانيّة مواضيع تستوفي المباده؟ وبصورة أدقّ، إلى أي مدى تؤكّد نصوص تلك المباده إمكانيّة العمليّات المترابطة في معنى المواضيع، وعرضياً في نوع من الوجود الوحدانيّ لها.

---

(34) بالفعل يوجد بخصوص بنية R نماذج غير معيارية، لا تتميّز عن النموذج المعياري من الدرجة الأولى. انظر على سبيل المثال: J. Petitot, «Rappels sur l'analyse non standard», dans: *La Mathématique non standard: Histoire, philosophie, dossier scientifique, fondements des sciences*, 0295-6977, recueil d'études de Hervé Barreau [et al.]; avec une préface de Georges Reeb; édité sous la direction de Hervé Barreau et Jacques Harthong (Paris: Editions du centre national de la recherche scientifique, 1989).

إنّ قضيّة الوحدانيّة في متصوّرات المواضيع المحدّدة تتجاوز بالطبع، الحالة الخاصّة للمتصوّرات الهندسيّة، فهيلبرت سوف يعترضه مشكل لاتوسّعيّة مجال المواضيع المعرّفة تبديهياً في بنائه العام للرياضيات[35]. إنّ لمفهوم الوحدانيّة في منظومة المواضيع معاني متمايزة عديدة منها.

أ ـ التماميّة، أو الإشباعية، في منظومة مباده، من حيث منافاتها لمبده جديد.

ب ـ الفئوية: التقابل البنائي بين جميع منظومات المواضيع الموفّية المباده، أو النماذج. الإشباعيّة تقود إلى عدم الفئوية، لأنها تجيز نماذج يكون فيها مبده مستوفى ونماذج أخرى يكون فيها نفيه، فالفئوية إذاً تقود بالاقتضاء العكسي إلى الإشباعية.

ج ـ لاتوسّعيّة حقل المواضيع هي في النهاية تعني استحالة أن نضيف إلى المنظومات بالجوهر مواضيع جديدة. وكمثال معاكس تقليدي، نذكر البنية التبديهية لجسم الأعداد النسبيّة، التي يمكن توسيعها إلى جسم الأعداد الحقيقية، وهي مواضيع واضحة الجدّة، أي إنها تتمتّع بخصائص لا تتمتّع بها المواضيع السابقة. غير أننا نميّز هاهنا بين لاتوسّعيّة بالمعنى القويّ، تتماهى مع الفئوية، ولاتوسّعيّة نسبيّة، ففي اللاتوسّعيّة القويّة، تتكوّن جميع نماذج البنية من مواضيع لا تختلف عن بعضها إلا بخصائص لا صلة لها بالبنية، ولا توجد نماذج جزئية ذاتية تتشكّل من مواضيع تتمايز جوهرياً من حيث البنية. لكننا نستطيع أيضاً أن نأخذ في الاعتبار لاتوسّعيّة نسبيّة، فهناك عندئذ نموذج «أقصى»، يوفّي المباده، وكذلك نماذج جزئية ذاتيّة تتميّز

(35) David Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik* ([n. p.: n. pb.], 1928).

مواضيعها جوهرياً عن النموذج الأقصى، رغم استنفائها للمباده، ففي الجبر، تلك هي حال نظرية الأجسام المقفلة جبرياً، اللاتوسّعية من حيث إن لها نموذجاً أقصى؛ لكنها تجيز نماذج جزئية ذاتية هي أجسام مقفلة جبرياً، لكنها متمايزة من حيث مميِّزاتها[36]، مختلفة عن الصفر الذي هو مميِّزة الجسم الأقصى، ففي تبديه هيلبرت الفضائي، من دون مبده التوازي، يقوم النموذج الأقصى من خلال الهندسة «المطلقة» لبولياي، حيث لا يؤخذ في الاعتبار وجود المستقيمات المتوازية وعددها. وتتوافق نماذج جزئية خاصّة، غير إقليدية، مع ضمّ مبده إقليدس أو واحدة من حالات نفيه. وفي هذه الحالة، المواضيع التي تحمل الأسماء نفسها تختلف في النموذج الأقصى عمّا هي عليه في النماذج الجزئية: فعلى سبيل المثال يأخذ متصوّر «الدورة» معنيين في الهندسة الإقليدية (خط مستقيم ودائرة) وثلاثة معان في هندسة القطع الزائد للوباتشفسكي (الدورة الجبلية، الدورة الفائقة والدورة). وهذا ما أبرزه فريج بصورة لافتة، إذ بخصوص النقطة، وهي أبسط المواضيع، كتب في رسالة إلى هيلبرت بتاريخ 27 كانون الأول/ ديسمبر 1899: «النقطة في الهندسة الإقليدية، وغير الإقليدية، وغير الأرخميديّة هي شيء ما يختلف في كل حالة».

4.4 ـ من الواضح، منذ هيلبرت والتطويرات الطارئة على فكرة التبديه عند بورباكي، أن هذا العرض المحكم، المنهجي والمقتصد للخصائص البنائية لمواضيع الهندسة ينتج فهماً واضحاً ومميّزاً للمتصوّرات الرياضية في الفضائية. وستكون التبديهات المختلفة لمواضيع هندسيّة النصّ الأساسي بالتأكيد لتحليلنا الفلسفي. مع مراعاة

---

(36) مميّزة الجسم، أو الحلقة، هي أصغر عدد صحيح $P > 0$ حيث تكرار الواحد مرات عددها P يعطي $P.e = 0$:0 الأجسام Q, R, C مميّزاتها هي صفر. جسم المتبقّيات للحلقة Z مقاس عدد أولي p مميّزته هي p.

استعمال المتصوّرات التي يستخدمها الرّياضيون في ممارسة أعمالهم، إذ يبدو لي أن التبديه وحده هو الذي يظهر وحدة تقنيّة في الفضائية الرياضية، بدلاً من وحدة معمارية. وأستعمل هاتين الكلمتين هنا راجعاً إلى استعمال كَنْت في نظريته المتسامية للطريقة، آخذاً بالاعتبار تغيير ما يجب تغييره في موضوع الحديث:

«إنّ التخطيط الذي لا تطرح ملامحه من فكرة، أي انطلاقاً من نهاية هامّة للتفكير، بل تجريبياً، وفق أهداف تبرز مصادفة (حيث لا يمكن معرفة عددها مسبقاً)، يعطي وحدة تقنيّة، لكن التخطيط الذي يتأتّى من فكرة (حيث الإدراك يقدّم مسبقاً النهايات ولا يتوصّل إليها تجريبياً) يؤسّس وحدة معمارية»[37].

حرفياً لن نتمسك من هذا التمايز بما يرتبط «بالغاية الرئيسية للعقل»، وسنخفف من معنى كلمة «تجريبياً» وكلمة «مصادفة»، حتّى لكأنهما تنطبقان هنا على استقلاليّة المباده وانتقاصها للتّوجيه وكذلك على ارتباطهما بالبراهين. بعد هذه التحفّظات، بودّنا أن نحاول تقديم الوحدة المعماريّة لمتصوّر الفضائيّة لا تشريحها فقط (كما تبسطه التبديهات)، بل كذلك من حيث فيزيولوجيتها وعلاقتها، إذا ما سمح لنا بهذه الاستعارة. ومثل هذا التحليل يجب أن يبرز في ما يبرز علاقة العمليات بالمواضيع، وهي علاقة حاضرة لكنها غالبا ما تكون عند تقديم التبديه.

على أنّ من المهمّ أن نتساءل بماذا يتميّز مشروعنا لتحديد فكرة الفضاء عن مشروع علم الظواهر أو (الفينومينولوجيا). وفي نهاية المطاف ألا يهدف كل منهما إلى تكوين معرفة شاملة بالفضائية؟

---

(37) Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, A. 883, B. 861, p. 749, and *Oeuvres philosophiques*, vol. 1: *Des Premiers écrits à la critique de la raison pure*, p. 1395.

ولكن كما عبّر عن ذلك هوسرل في رسالة إلى هـ. وايل في 10 نيسان/ أبريل 1918[38]، إنّ العالم بالظواهر يريد أن يعرض معرفة شاملة «تبقى دائماً على تواصل مع ميتافيزياء صوريّة جديدة (ميتافيزياء النظرية العامة ونظريّة التفرّد مسبقاً)».

والحال أننا لا ننشد إشراك معرفة شاملة للفضائية «بميتافيزياء صوريّة»، ولا نريد استنتاجها من تحليل للإدراك. بل نريد أن نظهرها في الأعمال، ونحاول أن نجيب، بقدر ما هو ممكن، على السؤال: ما هو الهندسي؟ باحثين عن صلة معمارية بين بعض أشكال عملاتية مستخرجة من التبديه في مجالات مختلفة من الرياضيات، ولكن بوضعها إن جاز القول في وضع ملموس في أعمال الرياضيين الخلاّقين.

وهكذا يتمفصل المخطّط الشامل الذي سنتّبعه انطلاقاً من جملة مفاهيم آتية، تسبق أيّ إعداد مختصّ، حاضرة في كل تجربة رياضية، كنقاط ارتكاز لكل ابتكار. قبل كل شيء تكفي نفسها بنفسها، وهي على نحو ما سيّدة تحققها ونموذج نفسها. وهي كنقاط انطلاق الحركة التحليلية التي تفكّكها إلى متصوّرات أساسية أكثر تجريداً، وكنقاط بدء التحوّل الذي يعيد تكوينها وينوّعها متصوّرات جديدة داخلية التمفصل، تعمل كشروط أولى للترميز والتعبير عن كل فكر رياضي. سننعت تلك المتصوّرات «بالطبيعية»[39].

---

(38) Tito Tonietti, «Quatro cartas de Edmund Husserl a Hermann Weyl: a influência do pensamento fenomenológico sobre a crise das ciências europeias,» *Análise: revista quadrimestral de filosofia*, vol. 1, no. 2 (1984).

(39) انظر: Gilles-Gaston Granger, «Sur L'Idée de concept mathématique «naturel»,» dans: Granger, *Formes, opérations, objets*.

هذا المؤلف هو بمعنى من المعاني استرجاع وتطوير وتحرير للدراسات التمهيدية لهذا النص التي لم تنشر أبداً.

إذاً سنتفحّص المتصوّرات الرياضية المكوّنة للفكرة «الطبيعية» للفضائية، وتفكيكها وهيكلتها من وجهة نظر مفاهيم ثلاثة، متتالية لكنّها متلازمة دائما بصفة كامنة، هي الأشكال والنسيج، والاعتلام والقياس.

تستهدف وجهة نظر الأشكال الموضوع الهندسي التّام، وسوف نجتهد في إبراز طريقتين في التناول العمليّاتي للهيئات الفضائية: طريقة التحويلات مع لامتغيّراتها، وتوليف المظاهر والطريقة التوليفية للأشكال المؤدية إلى الطوبولوجيا الجبرية.

وتتعلّق وجهة نظر النسيج الفضائي جوهرياً بمفهوم التواصل وتطوير الطوبولوجيا المجموعية.

وأخيراً ستقودنا وجهة نظر الاعتلام والقياس، إلى الجمع بين قضايا قياس مقادير الفضاء وقضيّة التمثيل في مراجع الهيئات الفضائية. وهنا ستكون الغلبة لحركة إعادة البناء والتأليف مهما كانت متسترّة لكنّها دائمة الحضور في وجهتي النظر السابقتين، من خلال حركة التفكيك والتحليل.

وهكذا نكون قد حاولنا إماطة اللّثام، في الأعمال الرياضية، عن السّمات التي تضفي على ما يبدو، معنى على فكرة الفضائية، هو في تطوّر مستمرّ لكنّه أرسخ ممّا تبديه.

القسم الأول

مفهوم «الأشكال» الهندسية

الفصــل الأول

الأشكال والتحويلات

مفهوم الشكل هو بكل تأكيد نقطة ارتكاز أساسية للفكر الفضائي، فقبل أن ندرس الإعداد الرياضي لهذا الجانب من الفكر، نودّ أن نذكّر ببعض الاعتبارات العامّة المتّصلة بالعلاقة بين التمثيل الفضائي للأشكال وبين مدلولية الصفة. وسنشرح بإيجاز في هذا المقام مشروع نيكول أورسم (1382 ـ 1325) وبرنامج لايبنتز (1716 ـ 1646) في تحليل المواضع.

1 ـ الأشكال والصّفات

1.1 ـ قصد نيكول أورسم أن يمثّل تغيّرات الصّفة فضائياً، أي تبدّلاتها في الدرجة أو في الشدّة[1]، والكلمة اللاتينية التي استعملها حينئذ هي الاندفاع. يقرّر أن «نسبة اندفاع إلى آخر» هي مماثلة لنسبة خط إلى آخر؛ وهذا التمثيل يفترض استمرارية الممثِّل

(1) في تشكّلات الصّفات أو في انتظام الاندفاعات وتغيّرها. نستشهد بناء على إعادة النشر الجزئي في: Edith Sylla, «Mediaeval Concepts of the Latitude of Forms: The Oxford Calculators,» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge* (1974).

والممثَّل، ويقبل عرضياً لاقياسيّة النسب[2].

«هذا الذي لا يمكن تخيّله بصورة فضلى إلا من خلال هذا النوع من التواصل، أي الخط، القابل قبل كلّ شيء للتقسيم، وبطريقة وحيدة»[3].

ويفترض هذا التمثيل أن يكون مقدار «الموضوع» الذي تتغيّر صفته موضّحاً:

أي «الاندفاع الذي بمقتضاه يقال بأن شيئاً ما يتمتّع بصفة ما على نحو أكثر أو أقل، كأن يكون أكثر بياضاً أو أكثر سرعة»[4].

يقترح نيكول أورسم حينئذ، قبل ديكارت بثلاثة قرون، رسم الشدّة (أو الاندفاع) على خط متعامد مع الخط الذي يرسم مقدار الموضوع، أو التوسّع. هو تمثيل يؤكّد فيه على ميزته المجرّدة الرمزية الصرفة: فالخط التمثيلي للشدّة

«لا يتمدّد حقيقة، لا انطلاقاً من نقطة ولا من خارج الموضوع، بل تخيليّاً فقط»[5].

«ثم إنّ طبيعة الاندفاع والتوسّع لا تهمّ، فالاندفاع قد يكون لصفة فاعلة أو جامدة، خاصّة بموضوع حسّاس أو غير حسّاس، أو بشيء أو وسط، على غرار الضّوء المنبثق من جسم الشمس أو من وسط وضّاء»[6].

---

(2) المصدر نفسه، I. 1، الأسطر 40 ـ 25.

(3) المصدر نفسه، السطر 38.

(4) المصدر نفسه، السطر 35.

(5) المصدر نفسه، السطر 55.

(6) المصدر نفسه، الأسطر 53 ـ 49.

ويختلف اختيار الموضوع، أي مقدار جوهر الصفة، وفق الاندفاع المأخوذ في الاعتبار، فقد يكون على سبيل المثال، الفضاء المجوب أو الوقت، إذا كانت الصّفة المنظور فيها هي السرعة، أو حتى مقدار السرعة إذا كانت الصّفة المتغيرة المأخوذة في الاعتبار هي ما نطلق عليه لفظ التسارع، أي تغيّر السرعة، وما يسميه نيكول أورسم العجلة[7]. لكننا نستطيع أن نتخيل جيداً اندفاعات من دون توسّع، أي صفات «تقبل التقسيم» من موضوع لا يقسّم، «كالروح والملاك»، اللذين لا توسّع لهما، شريطة أن تكون مقادير الشدّة أو الاندفاع قابلة للتقسيم «كما هو حال مقدار الخط».

على أنّ ما طوّره نيكول أورسم هو الحالة التي يكون فيها للموضوع نفسه توسّع قابل للتقسيم، فقد أدخل شكل الخط المتواصل الذي يتضمّن نقاط تمثيل قيمة الاندفاع (الشدّة) لكل قيمة للتوسّع، كتصوّر لما سيعرف في ما بعد باسم الدالّة. هذا بالإضافة إلى أنّه لاحظ أنّ المساحة الواقعة تحت ذلك الخط بين المحورين تمثل «كمية الصّفات»، أول فكرة عن التكامل. لكنّ اهتمامه ذهب خاصّة إلى شكل خط الاندفاعات (الشدّات):

«إن الخط الأعلى يُسمى خط القمّة، أو كذلك، وبالنظر إلى النوعيّة، خط الاندفاع (الشدّة)، إذ بتغيّره تتغيّر هذه الأخيرة»[8].

عندئذ يتفحّص الحالة حيث رسم التغيّر هو مثلّث قائم، يوضّح صفة «تغيّر منتظم»[9]، بمعنى التغيّر الخطّي بمعامل ثابت. ثمّ يتفحّص الحالة حيث رسم التغيّر مستطيل، يمثّل صفة ثابتة[10]،

---

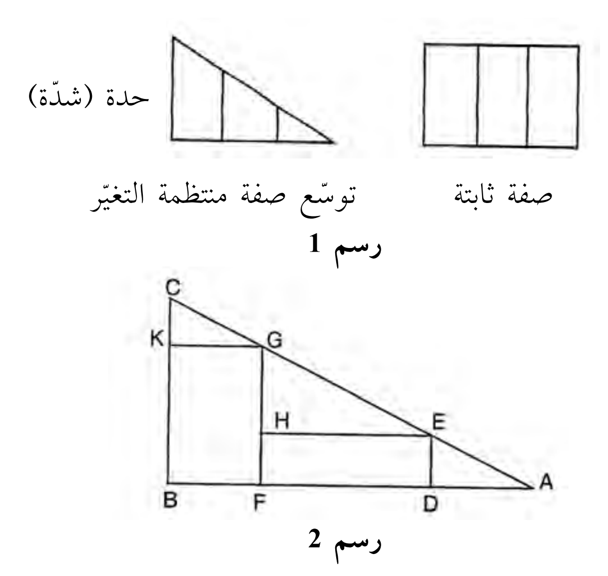
(7) II.5.

(8) المصدر نفسه، I. 10، السطر 162.

(9) المصدر نفسه.

(10) المصدر نفسه.

فنرى أن الجانب الفضائي في التمثيل يسترعي الانتباه من خلال المصطلح نفسه: إن الأمر يتعلّق بأشكال الصفة (المنتظمة أو المتبدّلة)، وفي الوقت نفسه ـ وهذا صحيح: بـ «تكميم» تلك الصفة وهو تكميم مفترض أساساً كما رأينا، فأورسم وضع أيضاً ملامح دراسة كمّية للتغيّر المنتظم. وعندئذ أخذ في الاعتبار (رسم 2) زيادتين متعاقبتين للاندفاع GH, CK، والزيادتين الموصولتين بهما في الموضوع BF, FD، مطلقاً عليهما اسم تجاوزات. ويبيّن باستدلال هندسي بسيط أن نسبة تجاوزات الاندفاع CK/GH تساوي نسبة تجاوزات الموضوع، وهذه خاصّة مميِّزة للدالّة الخطيّة (بكلام حديث $dy = kdx$).



رسم 1

رسم 2

نرى أن وجهة نظر أورسم، برغم أن هدفها تمثيل تغيّرات الصّفة، هي في الحقيقة تمثيل لاختزال «أشكال» التغيّر الكمّي في قياسات مقادير. ويظهر هذا التوجّه بصورة أوضح عندما ينوي أن يمثل في رسومه البيانيّة قياس «صفة التغيّر وسرعته»، أي أن ينزّل

عليها القيمة الوسطى بين نقطتين في الموضوع، فيُحل بالنتيجة محل مثلّث تغيّر النوعيّة المنتظم، مستطيل تغيّر صفة ثابتة مكافئة. والحلّ الصحيح على الوجه الأكمل والذي يبرزه حينئذ، بالنسبة إلى الصّفات الممثلة بخطوط، هو المستطيل على خط الاندفاع المأخوذ في النقطة الوسطى للموضوع، والنتيجة هي نفسها، مع أخذ ما يتغيّر بالاعتبار، بخصوص صفات عديدة الأبعاد ممثلة من خلال سطوح أو أحجام[11].

1.2 ـ يقترح لايبنتز، على النقيض من ذلك وفي مختلف محاولاته في تحليل المواضع، إنشاء رياضيّات أشكال تكون مستقلة عن أي اعتبار للقياس. وفضلاً عن ذلك تشير استباقاته لنظرية سوف لا تتطوّر حقاً إلا في نهاية القرن التاسع عشر، إلى وجهة النظر المزدوجة التي ستأخذ كل معناها في الهندسة الحديثة، فتوجّه هنا بالذات توزيع دراستنا للأشكال، فهي من ناحية تحديد لهذه الأخيرة على أنها لامتغيرات لتحويلات مُعرّفة، ومن ناحية أخرى هي بناء تلك الأشكال بواسطة التحليل التوليفي والجبر. وسنقتصر في هذه الحال على تجميع وتصنيف بعض نصوص لايبنتز العديدة غير المكتملة في أغلب الأحيان، المتعلّقة بمشروعه حول رياضيّات المواضع والأشكال.

فكرة لايبنتز الحاسمة هي في التأسيس بصفة عامّة لفكرة الشكل كمتصوّر، والشكل الفضائي قبل كلّ شيء، في كونه يتعارض مع المقادير المقاسة، ففي القدر لا نأخذ في الاعتبار إلا وجود الأجزاء وعددها فيضيف الموضع إلى ذلك بحقّ شكلاً معيناً[12]. لا يرتبط إلا

(11) المصدر نفسه، 7. III.

(12) «Analysin geometricam propriam,» in: Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathemathische Schriften*, vol. 5, p. 172.

بعلاقات متبادلة، داخليّة تقريباً، بين عناصر الرّسم[13]؛ لذلك يدخل رموزاً للتمييز بين مختلف أنواع علاقات غير متريّة: فرمز إلى التطابق بالعلامة ∞ وإلى التوافق بالعلامة ∞، مميزاً إيّاهما عن المساواة المشار إليها بالعلامة π، فهو يريد أن يبني إذاً، إلى جانب الرياضيّات العاديّة، تحليل المواضع:

«التحليل الرياضي يتعلّق بالمقدار لا بالموضع، بحيث ينتمي مباشرة وفوراً إلى الحسابيّات، ولا ينتمي إلى الهندسة إلاّ مجانبة».

حسب هذا الفيلسوف، سيكون التخصّص المطلوب بناؤه ضرورياً لتأسيس هندسة حقّاً، لا تبلغها بديهيات إقليدس، لأن:

«هذا النوع من التحليل [تحليل إقليدس] لا هو يرجع الأمر إلى الحساب، ولا هو يوصل إلى المبادئ الأولى وعناصر الموضع، وهذا ضروري من أجل تحليل كامل»[14].

إن الغاية من هذا التحليل ليست فقط تحديد المواضيع الهندسية، بعيداً عن قياساتها، تحديداً كاملاً، بل السماح أيضاً، انطلاقاً من العناصر، بحساب خصائصها. وعلى علم الأشكال الفضائية المطابق لمشروع تعريفية فلسفي عامّ أن يفي بذلك الشرط.

«لقد تساءلت... ألا يمكن أن يشار إلى جميع نقاط الشكل

---

(13) التعارض مقدار ـ موضع لا يقتصر عند لايبنتز على الهندسة؛ يعطي أيضاً مثال الأعداد الشكلية للأقدمين، التي هي مقادير، ولكن لها أيضاً موضع، شكل ـ بوانكارّيه، آخذاً بخصوص طوبولوجيته الاسم الذي أطلقه لايبنتز على تحليل المواضع، يقول: «إنها توصّف الوضع النسبي للنقاط، للخطوط والسطوح، من دون أي اعتبار لمقاديرها»: («Analysis situs», in: Henri Poincaré, *Oeuvres* (Paris: Gauthier-Villars, 1913-1965), vol. 6, 1953).

(14) Leibniz, Ibid., V. iii, p. 278.

وجميع علاقاته من خلال هذه الحروف عينها، بحيث يقدم كلّه بطريقة تعريفيّة، وبحيث إن الخصائص التي تبيّنها كثافة الخطوط المرسومة بصعوبة أو لا تبيّنها أبداً، يمكن أن تستكشف من خلال موقع الحروف المنفرد وتبادليّتها»[15].

وتبعاً لهذا البرنامج، يجب أن تتضمّن أيّ هندسة في التعاريف الأصلّية لمواضيعها الأوّلية ما يشتقّ منه من خلال الحساب كل ما يمدّنا به تخيّل الفضاء، وكذلك ما يستعصي عليه كشفه لنا:

«كل ما يدركه التخيّل التجريبي في الرّسوم، يجب أن يشتقّه الحساب من العلامات ببرهان أكيد، وكل ما تبقّى يجب أن يستتبع منه، مهما عجزت مَلَكَة التخيّل عن الوصول إليه، ففي حساب المواضع الذي اقترحته توجد، تتمة للخيال والكمال إن جاز القول»[16].

هذا الحساب يرتكز أساساً، كما تبيّنه الملامح التي أعطاها بخصوصه لايبنتز، على تحاليل توليفية لأشكال أوّلية. لكن علم الأشكال الفضائية هذا لا يمكن أن يكون أساسه خصائص متريّة، لأن معناه وبناءه يفرضان مسبقاً خصائص أكثر أصالة في الأشكال:

«إن الأمر لا يتعلّق بنسبة أو تناسب بقدر ما هو علاقة»

وعلى سبيل المثال يجب ألاّ ترجع فكرة تشابه الأشكال إلى مفهوم المتريّة الإقليديّة للتناسبية. ولكن لا يكفي القول بأن لرسمين متشابهين الشكل عينه، «إذاً لم يكن لدينا مفهوم عام حول الشكل».

إذاً، ما يريد لايبنتز بناءه تحت اسم تحليل المواضع، هو علم

(15) *Char. Geometrica*, 10 août 1679، في: المصدر نفسه، ص 141.

(16) *De analyis situs*، في: المصدر نفسه، III، ص 183.

الأشكال الهندسيّة، وإحدى مميّزات هذه الأشكال التي يعترف بها هي لاتغيّرُها بتحويلات محددة، فيعرِّف الخط المستقيم إذاً كالرّسم الذي لا يمكن نقله (من دون إتلاف الشكل) إذا كانت نقطتان من نقاطه مثبّتتين (ميزة هندسيّة)، والنتيجة هي نفسها بخصوص الدائرة.

1.3 ـ هكذا نرى، في هذين المثالين لكل من نيكول أورسم ولايبنتز، كيف أن متصوّر الشكل الهندسي، رأى النور، من مناظير جدّ مختلفة، حتى قبل أن يكتمل تكوينه كلحظة أساسية في الفكر الفضائي. هذا التكوّن هو ما نريد تفحّصه الآن، متناولين أولاً وجهة نظر الشكل كلامتغير بتحويلات، ثم في الفصل التالي، كبناء توليفي، وهما تفسيران بادر بهما بعبقريّة كما رأينا سابقاً فيلسوف هانوفر.

2 ـ استنفار الأشكال ومبحث الهندسة الإسقاطية

2.1 ـ يقوم تحويل شكل فضائي، بصورة عامة، على اقتران ماهيّة فضائيّة A بماهية فضائية B، في هذا الترتيب (A→B)، مع المحافظة على الميزة الفضائية، غير المعرّفة بعد. ويفترض أن يقبل ذلك الاقتران التركيب، عرضيّاً تحت بعض الشروط[17]، وأن يكون تشاركيّاً: إذا أخذنا في الاعتبار ثلاثة اقترانات a, b, g قبل التركيب تطبيق g على نتيجة التركيب ab يعطي نفس نتيجة تطبيق a على نتيجة الاقتران bg. وإضافة إلى ذلك، هناك تحويلات واحديّة تقرن بكل ماهيّة الماهيّة عينها[18]. هذا التعريف العامّ جداً للتحويلات سيجدّدها «كسهام» فئة مواضيعها هي الرسوم الفضائية التي ستتعرّف

---

(17) إذا كان «الهدف» B في الاقتران A → B يتماهى مع «المصدر» C في الاقتران D → C، يكون التركيب ممكناً، ويعطي الاقتران A → D.

(18) بصورة أدق، نفترض أن التحويل 1 لهوية في A هو: 1_A. لدينا

$1_A.(A\to B) = A\to B$; et $(B\to A).1_A = B\to A$.

من خلال الخصائص الصورية لسهامها. وفي الواقع، أدخلت التحويلات الفضائية ودرست في شكل أخصّ وأقرب إلى الواقع، فتحويل A إلى B يفترض إذاً أنه يُطَبّق على أي A في كون المظاهر، ويفترض أن كل تحويل قابل للنكس، بحيث إن تركيب التحويل A مع منكوسه A^{-1} يفضي إلى التحويل الوحدة الوحيد. هذه التحويلات تشكّل إذاً زمرة سندخل لاحقاً على نحو واضح متصوّرها ونتفحّص أهمّيتها القاطعة. حالياً، نودّ التأكيد على استنفار فكرة الشكل الفضائي، بداية بواسطة فصيلة خاصّة من التحويلات تنعت بالإسقاطية.

جيرار ديزارغ، هندسي ممتهن تصاميم السلالم، هو من وضع أول نظرية حول الإسقاطات المركزية بهدف إقرار وتطوير تمثيل الأشياء الصلبة. («مسودّة مشروع لبلوغ مقتضيات تقاطعات المخروط مع المسطح» 1639. ونستشهد نقلاً عن طبعة تاتون)(19). والتحويل المنظور فيه يتمثّل إذاً في إسقاط رسم على مسطّح انطلاقاً من نقطة. تحديد ما تؤول إليه خصائص الرّسم، وبصورة خاصّة معرفة الخصائص التي تبقى من دون تغيير، هذا هو هدف الهندسة الجديدة، التي يكيل لها ديكارت مديحاً صادقاً من دون شك لكنه ملتبس بعض الشيء، ناعتاً إياها بـ «ميتافيزياء الهندسة»، بحيث إن الشاب بليز باسكال هو الوحيد في عصره الذي فهم جدّة الابتكار، إذ إنّ أحد أكثر خصائصها أصالة غياب أيّ دور لقياس المقادير فيها. وديزارغ نفسه يطبّق أفكاره على دراسة قطوع المخروطات، ويبرهن، مع الأسف بلغة مجازيّة غير مألوفة لدى الهندسيين إذاً، كيف أن

---

(19) نسمح لأنفسنا بخصوص الابتكار الأرغيزي أن نحيل على: Gilles-Gaston Granger: *Essai d'une philosophie du style*, éd. rev. et corrigée (Paris: O. Jacob, 1988), chapitre 3, et *LIrrationnel* (Paris: O. Jacob, 1998), chapitre 3.

هندسة تلك المواضيع المختلفة تكوينياً يمكن أن تختزل في هندسة موضوع وحيد، بفضل لاتغيرية الخصائص التي تحافظ عليها الإسقاطات، والتي يبرهن «على أنّ جميع قطوع المخروط تشترك فيها» (رسالة إلى مرسان في 4 آب/ أغسطس 1643).

2.2 ـ الميزة المباشرة لهذا التمثيل للمواضيع الفضائية هي أن الإسقاطات تحافظ تكوينياً تقريباً على رسوم ثلاثة : النقطة، والمستقيم والمسطّح، فبصورة عامّة جداً يوحي الاعتراف بمثل هذه الفضائية وكذلك تطبيقها على نظريّة المخروطات التقليدية عندئذ بالأسئلة الآتية التي سنبدأ في تفحّصها:

في **المقام الأول**، ماذا تعنى أفضليّة هذه الرّسوم الثلاثة: النقطة، المستقيم والمسطّح، وهل اختيار هذه الرّسوم الأصليّة هو الوحيد الضروري لتأسيس فكر فضائي؟

وفي **المقام الثاني**، إلى أيّ حدّ تجبر التصورية الإسقاطية على اعتبار بنية شمولية طوبولوجية الطبيعة في مجمل أشيائها وما هو الخيط الرابط بين تلك الضواغط واختيار بديهيات مختلف عن الاختيار الإقليدي المألوف؟

وأخيرا في **المقام الثالث**، تظهر «الهندسة الإسقاطيّة» لامتغيّراً خاصّاً يمكن ان نأخذه في الاعتبار كنظير ثبات رسم يتشكّل من عناصر أصليّة أربعة، هي نقاط، مستقيمات أو مسطّح. إنها النسبة اللامتناسقة، التي أبرزها وأخذها ديزارغ نفسه كأداة حاسمة في توصيف الرسوم الإسقاطية[20]، غير أن النسبة اللامتناسقة تظهر في

(20) في حالة نقاط A, B, C, D على خط مستقيم، صياغة النسبة المتصالبة هي: CA/BC: DA/BD، المقاطع تؤخذ جبرياً وفق ترتيب النقاط على الخط المستقيم. الحالة الخاصة للتساوي مع 1 ـ تعرّف القسمة التناسقية حيث اللاتغاير يؤخذ أيضاً كتمييز للإسقاطيات.

الأصل، كما يشير إلى ذلك الاسم نفسه، كخاصيّة متريّة، فكيف يؤثّر هذا الظهور للقياس في نظريّة رسوم هي في الأساس مستقلّة عنه؟

3 ـ الأشكال الأساسية

3.1 ـ سنبدأ بملاحظات تتعلّق بمحاولتين، إحداهما بهدف تأسيس هندسة مبنية على أشكال أساسيّة أخرى غير المسطّح والمستقيم والنقطة، والأخرى بهدف تعريف الأشكال الأساسيّة من خلال خصائص عمليّات جبريّة بحتة.

المثال الأول مستعار من تارسكي[21]، فقد أبان عالم الهندسة الإيطالي م. بييري أنّ في الإمكان صياغة جميع مباده هندسة إقليدس بواسطة مفهومين وحيدين، مفهوم النقطة ومفهوم «تساوي المسافة بين نقطتين ونقطة ثالثة». سيبني تارسكي هذين المفهومين بالذات انطلاقاً من مفهوم أصلي جديد وحيد يُدعى كرة، لكن هذا الموضوع الجديد لا يتطابق مع سَمِيِّه الإقليدي، فقبل كل شيء كرة تارسكي ليست مجموعة نقاط، إذ سبق تصوّرها فكرة النقطة نفسها. ثمّ إن تعريفها لم يأت إلاّ من خلال مباده صيغت بلغة المنطق القويم لليسنيفسكي، نظريّة منطقيّة حول علاقات التلاقي بين المواضيع المنطقية الأساسية المسمّاة «الأفراد»، فمتصوّرات المنطق القويم سوف تعبّر إذاً عن تلاقيات الأشكال الهندسية غير المتكافئة مباشرة مع احتواءات مجموعات النقاط، فعلاقة المنطق القويم الأساسية هي علاقة الجزء مع الكلّ، أو بالأحرى «القطعة» مع الكلّ، بهدف

(21) «La Géométrie des corps», dans: Alfred Tarski: *Logic, Semantics, Metamathematics; Papers from 1923 to 1938*, Translated by J. H. Woodger (Oxford: Clarendon Press, 1956), et *Logique*, *sémantique*, *métamathématique*, *1923-1944 (Paris: A. Colin*, 1972-), I. 2, pp. 29-34.

تحاشي التمثّلات المجموعيّة، وانطلاقاً من تلك العلاقة الأساسيّة تعرّف علاقة الأفراد «المنفصلين». الفردان يكونان منفصلين إذا لم يوجد فرد يكون في نفس الوقت قطعة من أحدهما ومن الآخر. الصفة المميّزة للمنطق القويم بالنسبة إلى النظريّة التقليدية للمجموعات هي عدم وجود فرد «خال» يكون قطعة من كل فرد[22].

سوف يعرّف تارسكي النقطة كشكل يُشتق، انطلاقاً من الشكل الأصلي للكرة، من خلال البناء الآتي. والموضوع «الكرة» نفسه لا يعرّف قطعاً إلا من خلال المباده التي تحدد بعض علاقات بين الكرات (الرسم 3):

بخصوص كل X في C يوجد Y قطعة من a (أو من b) منفصلة عن X أو قطعة من X.

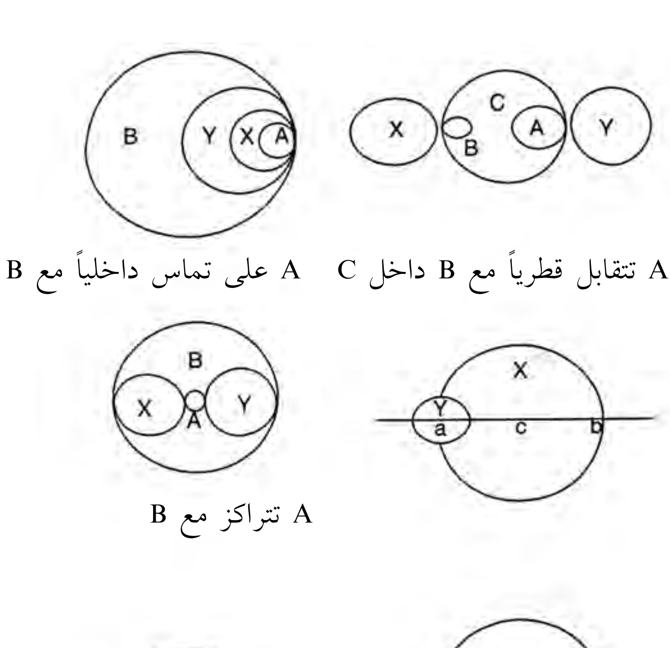
أ ـ تكون الكرة A في تماسّ داخليّ مع B إذا كانت A قطعة ذاتيّة من B وباعتبار كرتين X وY. A قطعة منهما وهما قطعة من B، كانت كذلك إحداهما على الأقل قطعة من الأخرى.

ب ـ نعرّف التماس الخارجي على نحو مشابه.

ج ـ تكون الكرتان A وB متقابلتين قطريّاً داخل C إذا كانتا على تماسّ داخلي مع C وباعتبار كرتين X وY منفصلتين عن C بحيث تكون A في تماسّ خارجيّ مع X وB في تماسّ خارجيّ مع Y كانت الكرة X عندئذ منفصلة عن Y.

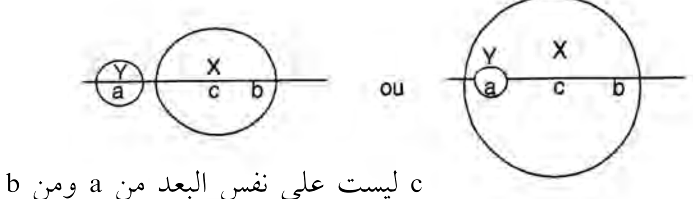
---

(22) تارسكي يدخل أيضاً تعريف **مجموع** طبقة من الأفراد: أنه فرد بحيث إن كل عنصر في الطبقة هو إحدى قطعها، وبحيث إنه لا توجد قطعة من هذا الفرد منفصلة عن جميع عناصر الطبقة. **الجسم** هو مجموع **كرات**.



A تتقابل قطرياً مع B داخل C　　A على تماس داخلياً مع B

A تتراكز مع B



c ليست على نفس البعد من a ومن b

رسم 3

د ـ نعرّف على نحو مشابه عبارة «تتقابلان قطريّاً من الخارج».

هـ ـ يكون للكرة A وللكرة B نفس المركز في حال استيفاء أحد الشروط الآتية:

❊ الكرة A والكرة B تتماهيان.

❊ A هي قطعة ذاتية من B، وباعتبار أنّ كرتين X وY تتقابلان قطريّاً وتتماسّان خارجياً مع A وداخلياً مع B، تتقابلان قطريّاً من الداخل على B.

و ـ النقطة هي صنف كرات لها نفس مركز كرة معيّنة.

ونرى على الرسم 3 لماذا اختار تارسكي اسم الكرة لكي يشير إلى الشكل الأساسي؛ فالسبب هو أن التعاريف التي تميّزه تبديهياً لا يمكن أن تنطبق على نموذج حدسي مجموعي مزوّد بمتريّة، نموذج تكون فيه الكرة ممثلة بأي مجموعة مترابطة من النقاط، باعتبار «التكوّر» بالمعنى العادي (ثبوتيّة القطر) صفة مطلوبة في النموذج المتري لكي يكون تعريف التماسّ الداخلي على سبيل المثال ممثلاً. وهذا ما يظهر على نحو أفضل مع تعريف تساوي المسافة لنقطتين بالنسبة إلى نقطة ثالثة: النقطتان a وb على مسافة متساوية من النقطة c إذا وجدت كرة X عنصر من النقطة c، بصفة لا وجود معها لكرة y تكون عنصراً من النقطة a أو النقطة b وتكون قطعة من X أو منفصلة عن X. لقد رسمنا حالة تساوي المسافة وتبدو حالتا عدم تساوي المسافة بوضوح مرتبطتين بالقطر الثابت للممثّلات الأقليدية للكرات.

مثل هذا البناء لا يقدّم إلا تعريف حقل المواضيع الأساسية في نظرية الأشكال (أو الرّسوم). ومع ذلك هو كاف على سبيل المثال لتعريف جميع متصوّرات هندسة إقليدس، بما أنّ بييري برهن أنّ مفاهيم النقطة وتساوي مسافة نقطتين بالنسبة إلى ثالثة[23] كافية في ذلك. ولكي نصنع هندسة ممّا سبق، يجب أن نعيّن خصائص جديدة للمتصوّرات التي سبق تعريفها؛ هذا ما فعله تارسكي بأسلوب تركيبي معلناً المبده: «مفاهيم النقطة وتساوي مسافة نقطتين بالنسبة إلى ثالثة

---

(23) «La geometria elementare instituta sulle nozione di punto e sfera», *Memorie di matmatica e di fisica della società italiana delle scienze*, série Terza, XV, 1908, pp. 345-450.

كما سبق تعريفها تستوفي مسلّمات الهندسة الإقليدية ذات الأبعاد الثلاثة»، وهي في نظره كافية لصياغة هذه الأخيرة.

إن من الممكن إذاً أن نبني تمثيلاً غير نقاطي للأشكال الفضائية، من دون أن نتّخذ النقطة والمستقيم والمسطح كأشكال أصليّة. وعندئذ تبنى تلك العناصر الثلاثة كمتصوّرات مشتقّة من منطق الرتبة الثانية كطبقات من مواضيع أكثر أصالة. على أنّنا نرى لماذا وكيف، في الوضع المألوف، يمكن القول عن صدق، بأن أشكال النقطة والمستقيم والمسطّح، مأخوذة كمواضيع أساسية، هي «طبيعية»، فعندئذ لا تكون مركّبة من جديد بواسطة علاقات تحمل على موضوع كيفيّ التعريف، ككرة تارسكي.

3.2 ـ محاولة أخرى لإعادة تأسيس رسوم هندسة هي محاولة ج. يلمسلاف[24] التي طوّرها ف. باخمان[25]. والمسألة تتعلّق عندئذ بأن تحلّ محلّ المواضيع الأصليّة عمليّات، علاقاتها الصوريّة تتوافق مع علاقات المواضيع. ويمكن أن نرى في محاولة باخمان الناجحة جداً بيّنة على طرحنا العام بأن كيان المواضيع الرياضية دائم الارتباط بمنظومة عمليّات[26]. أضف إلى ذلك أنّ من الواضح أن عمل باخمان مستوحى من لايبنتز فهو يريد أن يؤسّس حساباً للرّسوم الهندسيّة المسطّحة. ويدوّن في مقدمته بأنّ من الممكن أن نرى:

---

(24) J. Hjelmslev, «Neue Begrundung der ebenen Geometrie,» *Mathematische Annalen*, vol. 64 (1907).

(25) Friedrich Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff; eine Vorlesung* (Berlin: Springer, 1959).

(26) انظر: «Contenus formels et dualité,» dans: Gilles-Gaston Granger, *Formes, opérations, objets*, mathésis; ISSN 1147-4920 (Paris: J. Vrin, 1994), chap. 3.

«في هذا الحساب المتعلّق بالمواضيع الهندسية، المستقل عن منظومة الأعداد ومنظومات النسب، خطوة نحو تحقيق الانتقادات التي أثارها لايبنتز في وجه هندسة ديكارت»[27].

عملية باخمان الأساسيّة هي التناظر بالنسبة إلى مستقيم، وسوف نماثل مع الموضوع عينه كمستقيم، المدوّن بمؤشّر من خلال حرف صغير، جميع التناظرات Sx بالنسبة إلى المستقيم نفسه x. لكن هذه العمليّات نفسها لا تتحدّد بدقّة إلا من خلال خصائصها الصوريّة التاليّة: من حيث التضامن، أي إنّها تتطابق مع عكسها، بحيث إن تضعيفها من جديد يعطي العملية الواحديّة، ومن حيث التركيب في ما بينها المؤدّي أيضاً إلى تناظر، ومن حيث إن لكل منها عكساً، فمجموعة هذه التناظرات تشكّل إذاً زمرة، والعمليّة الواحدة تتماثل مع تناظر منحلّ، العنصر المحايد في الزمرة. ولكي يُدخل النفي بالإضافة الفاعل في رسم أساسي ثان، وهو «النقطة»، يأخذ باخمان في الاعتبار جداء تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متعامدين، وهو عندئذ تضامني يتكافأ مع دوران زاويته π، أو تناظر حول نقطة تقاطعهما X. ويدوّن sx، ويماثل مع نقطة التقاطع نفسها، التي يقابلها ذلك الجداء على نحو أحادي الدلالة. عمليّات التناظر الجديدة هذه بالنسبة إلى نقطة تشكّل أيضاً زمرة، هي زمرة جزئية في زمرة التناظرات بالنسبة إلى مستقيم. والخاصّة الجبريّة للتّضامن هي بذلك الميزةُ الحاسمة في المُقابلة بين جداءات التناظر وبين خصائص المواضيع الهندسية، من نقاط ومستقيمات. وباستيفائها من قبل تركيبات التناظر في كلتا الزمرتين على التوالي، يسمح استيفاؤها من قبل بعض التركيبات بين نوعي التناظر بالتعبير جبريّاً عن خصائص

(27) Bachmann, Ibid., p. VII.

هندسية يمكن اختيارها كبديهيات منظومة رسوم تُبنى بواسطة المستقيم والنقطة. لقد طوّر باخمان جملة منها، تتوافق مع هندسات مسطّحة غير إقليدية، وخاصّة مع «هندسة متريّة مطلقة».

على سبيل المثال، للتعبير عن إن النقطة A هي على المستقيم b، نكتب بأن الجداء $S_A S_b$ تضامنيّ. ولكي نعبّر، كبديهيّة في هذه الهندسة، عن أنّ النقطة A والنقطة B تحدّدان مستقيماً g، نكتب وA متميّزة عن B، أنّ هناك تناظراً S_g بخصوص التناظرين sa وsb يحصل معه أن يكون الجداءان $S_A S_g$ و$S_B S_g$ تضامنيّين. وأيضاً، بخصوص وحدانيّة التقاطع P بين المستقيم g والمستقيم h نكتب: إذا كان التناظر sp بالنسبة إلى النقطة P والتناظر Sq بالنسبة إلى نقطة ما Q يتركّبان تضامنيّاً مع التناظر S_g بالنسبة إلى المستقيم g والتناظر S_h بالنسبة إلى المستقيم h، عندها تتطابق النقطة P والنقطة Q، الواقعتان على المستقيمين أو أن المستقيم g والمستقيم h يتطابقان.

يسمح هذا التمثيل للرّسوم من خلال عمليّات بتحقيق جبرنة البعض من خصائصها. الهندسة بالجبر على هذا النحو هو واقع علومي سنصادفه في كثير من المناسبات، وتحت أشكال مختلفة. ديكارت، في هندسته سنة 1636، قدّم لنا بهذا الخصوص بكل وضوح أولّ مثال منهجي وناجح بالكامل. لكنه محدود، لأن الأمر حينئذ هو حساب على المقادير الهندسيّة. والمثال الذي قدّمناه منذ حين هو من طبيعة مختلفة تماماً، فهو يقترح حساباً على أشكال هندسية، متماهية مع عمليات متّصلة بها. وسنرى قريباً أمثلة أخرى من الجبرنة، مطوّرة باتجاه توليفات من عناصر مشكلة من المواضيع، سوف توحي لنا بأفكار أعمّ تهم دور الجبر في فكرة الفضاء.

4 ـ الهندسة الإسقاطية والميزات الإجمالية للمظاهر الأساسية

4.1 ـ رأينا أنّ خصائص التلاقي والترتيب[28] والاستمرارية هي الوحيدة المعتبرة في فضاء الإسقاط لكنّ رسمي المستقيم والمسطّح سيكون لهما من الآن فصاعداً إجمالية جديدة برغم احتفاظهما محليّاً بمعنى الهندسة الإقليديّة الحدسيّ، فالمستقيم الإسقاطي هو منحنى مغلق، أي إن متحرّكاً يجوب على نحو لانهائي مثل ذلك المستقيم، سيعاود المرور بمواقعه، مع الحفاظ على وجهته، بعد أن يكون قد عَبَرَ اللانهاية»، إن صح القول. ويمكن رسم صورة عن ذلك على مسطّح إقليدي، في نموذج يتمتّع بنفس الخصائص الصوريّة. وستكون حزمة مسطّحة من المستقيمات الإقليدية هي ذلك النموذج للمستقيم الإسقاطي، باعتبار كل شعاع من الحزمة صورة نقطة من نقاطه؛ فنرى بالفعل أن الدوران الكامل لشعاع من الحزمة يعيده إلى موقعه الأصلي، وذلك بعد المرور إثر دوران زاويته π، على شعاع يتوافق مع نقطة اللانهاية.[29] أما المسطّح الإسقاطي، فإنه سطح وحيد الجانب، ليس له إلا وجه واحد. وسيكون تمثيل حدسي في الفضاء الإقليدي على سبيل المثال كرة منبسطة تكون النقاط المتقابلة في صفحتيها المشكّلتين على ذلك النحو متماهية[30]. والسبب الجوهري في هذه التغيّرات

---

(28) بديهيات الترتيب على المستقيم الإسقاطي تختلف عن البديهيات الإقليدية، من جرّاء الاعتراف بنقطة معتلّة «في اللانهاية» على كل مستقيم ومن كون المستقيم «في عبوره اللانهاية» هو منحنى مغلق، فالترتيب عليه هو دائري. بدل العلاقة «بين»، التي هي ملتبسة إذاً، من الأنسب استعمال كلمة «يفصل»: زوج ونقاط AB يفصل زوج نقاط آخر CD إذا كنا لا نستطيع أن نطابق نقاط زوج إلا بعبور نقطة من الزوج الآخر. محلياً، أي من دون تدخل نقطة اللانهاية، العلاقة «بين» هي سليمة. تتضمّن الهندسة الإقليدية التقليدية إضافة إلى ذلك بديهيات التطابق وبديهيّة الموازيات.

(29) شعاع يمكن أن يكون أي شعاع. من ذلك نرى بأن نقطة اللانهاية في المسطّح الإسقاطي لا تتميّز جوهرياً عن أي نقطة أخرى.

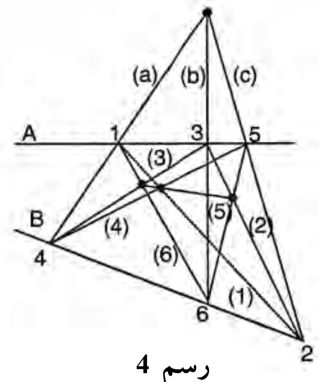
(30) بنيتها الطوبولوجية الصحيحة هي بنية كرة مثقوبة محاطة بشريط موبيوس، سطح وحيد الجانب يُحصل عليه بلف شريط ولصق طرفيه.

الإجمالية أن عناصر في الفضاء الإسقاطي محسوبة في اللانهاية بالمعنى الحدسي الإقليدي تعرَّف بأنّ لها نفس وظيفة العناصر «الذاتيّة» ويمكن رسمها كأيّ عنصر ذاتي. ويوجد على كل مستقيم إسقاطيّ نقطة وحيدة في اللانهاية عليها ينغلق وفي المسطّح الإسقاطي يوجد مستقيم في اللانهاية، هو ملتقى جميع نقاط المسطّح التي هي في اللانهاية، وفي الفضاء الإسقاطي ثلاثيّ الأبعاد يوجد مسطّح في اللانهاية هو ملتقى المستقيمات في اللانهاية. ولا وجود لخاصيّة إسقاطيّة، أي منحفظة بالإسقاط، تميز مثل تلك العناصر عن عناصر المسافة المنتهية، ويمكن القول إن الإسقاط يلغي بطريقة ما، المسافة بين المنتهي واللامنتهي، فبديهيّات الإسقاط تتّخذ إذاً شكلاً شاملاً كلّياً. وعلى سبيل المثال، إنّ لأيّ مستقيمين في مسطّح نقطة مشتركة (ذاتيّة أو غير ذاتيّة إذا كانا بالمعنى الإقليدي متوازيين)، أو أيّ مستقيم «يتضمّن على الأقل ثلاث نقاط (واحدة منها غير ذاتيّة)».

وتنجم أيضاً عن هذه البنية الإجمالية الخاصّة بالرّسوم الأساسيّة للإسقاط، ميزة تتمثّل في إمكانيّة اختيار اتجّاه لكل توجّه، فعلى المستقيم الإقليدي الحدسي، يمكن اختيار اتّجاهين للحركة، وفي المسطّح الإقليدي يمكن اختيار منحنيين للدوران على منحنى مغلق، وفي الفضاء الإقليدي يمكن اختيار منحيين في برم اللولب. وعلى المستقيم الإسقاطي وفي الفضاء الإسقاطي، يبقى الاختيار بين منحيين قائما أيضاً: والاتّجاه المختار لا يتغيّر بعد «عبور اللانهاية». وليس هذا حاصلاً بخصوص المسطّح الإسقاطي، لأن منحى الدوران على منحنى مغلق غير محدّد بعد «عبور اللانهاية». استتباع هامّ على نحو مميّز لعدم الاتّجاهية في المسطّح الإسقاطي نظراً لاعتكاسه يتعلق بالمخروطيّات، ويبيّن هويّتها الإسقاطية العميقة، لأن الفارق بينها من ناحية المظهر التشكّلي ليس سوى تأثير انتقالها في المسطّح الإسقاطي، فبالفعل، إذا ابتعدت بؤرة قطع ناقص عن المحور بصورة

لانهائيّة، أصبح قطعاً مكافئاً، وإذا ابتعدت البؤرة الأخرى نحو اللانهاية، سيظهر من جديد تقريباً من الناحية الأخرى للانهاية كقطع زائد، حسب الظاهر (من الناحية الإقليدية) مقسوماً إلى فرعين. أول من اكتشف هذا الأمر هو ديزارغ، حيث القطع الزائد، بلغته المجازيّة، هو «قصّ لفيفة (قطع مخروط) ينقسم على مسافة لانهائية إلى نصفين متعارضين ظهراً لظهر»[31].

4.2 ـ إنّ قصر خصائص الفضاء الإسقاطي على الالتقاء والترتيب والاستمرارية، يجعل من شأن عدد متناه من النقاط ومن المستقيمات (في المسطّح) أن يشكّل رسماً هندسيّاً هامّاً، يتمتّع بخصائص تحفظها الإسقاطات، نوصّفها تقليدياً حسب العدد المتناجي من النقاط والمستقيمات التي تلزمها، وعدد نقاط الالتقاء على كل مستقيم، وعدد المستقيمات المارة بكل نقطة. رسمان متناهيان يتميّزان بشكل خاص، أحدهما يعرف برسم باسكال وآخر بتشكّل ديزارغ (رسم 4).



رسم 4

تشكّل باسكال وتشكّل بريانشون المزدوج.

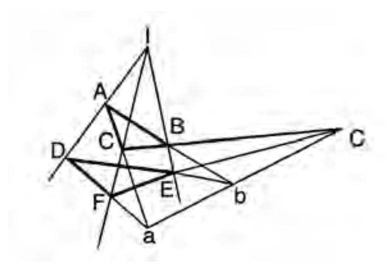
---

(31) Girard Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan* ([Paris: s. n., 1639]), p. 137.

المستقيم A والمستقيم B هما مخروط منحل، وضلوع السداسي المحاط أو المحيط، مختلطة هنا، وهي المستقيمات (1), (2), (3), (4), (5), (6)، والأقطار هي المستقيمات (a), (b), (c).

تشكّل باسكال يتضمّن 9 مستقيمات كل واحد منها يمرّ بنقاط ثلاث، كل واحدة منها على مستقيمات ثلاثة، والخاصيّة هي الآتية: إذا كانت نقاط ست هي رؤوس سداسي أضلع محاط بمخروط ما، كانت تقاطعات الأزواج من الأضلع المتقابلة على خط مستقيم. وقد برهن بريانشون في القرن التاسع عشر على الخاصيّة الصنويّة لسداسي محاط، أي متماسّ الأضلع مع مخروط، والخاصيّة هي تقاطع أقطار السداسيّ في نقطة واحدة. وتتمثّل الصنويّة، وهي الميزة الأساسية في الأشكال الإسقاطية في ما يأتي: يمكنك أن تبادل بين الكلمتين «مستقيم» و«نقطة» في قضية تتعلّق بالمسطّح مع الحفاظ على القيمة، فتستطيع صياغة رسمي بسكال وبريانشون صياغة تبرز ذلك التناظر فتقول:

بالنسبة لباسكال: تشترك المستقيمات (الأقطار) المتضمّنة لنقطتين متقابلتين في نقطة وبالنسبة لبريانشون تنتمي النقاط المنتمية لمستقيمين (ضلعين) متقابلين لنفس المستقيم.



رسم 5

المثلثان المتماثلان هما ABC, EFD، تقع الرؤوس المتماثلة على التوالي على ثلاثة مستقيمات متقاطعة. نقاط تقاطع الأضلع المتماثلة a, b, c تقع على نفس المستقيم.

يتكوّن رسم ديزارغ من مثلّثين في نفس المسطّح نقول إنهما «متجانسان»، أي إن رؤوسهما المتجانسة تقع على ثلاثة مستقيمات متقاطعة. مبرهنة ديزارغ تقول بأن الأضلع المتقابلة في المثلّثين تتقاطع عندئذ على نفس المستقيم. والرسم يتضمّن عشرة مستقيمات، كل واحد منها يمرّ بثلاث نقاط، وعشر نقاط، كل واحدة منها على ثلاثة مستقيمات.

رسم ديزارغ ذاتيّ الصنويّة، لأن صياغته يمكن أن تتم بطريقتين :

للمستقيمات المتضمّنة نقطتين متقابلتين في المثلّثين نقطة مشتركة.

النقاط المنتمية إلى مستقيمين (ضلعين) متقابلين في المثلّثين تقع على نفس المستقيم.

بداية، يستدعي هذان الرسمان ملاحظتين: الأولى هي أن باسكال ـ بريبانشون، (أي رسم باسكال ـ رسم بريبانشون) بإدخاله مخروطاً، يفترض أن مفهوم المخروط هو من طبيعة إسقاطية بحتة، من دون تدخّل قياسات المقدار. وهذا بالضبط ما بيّنه كلّ من ديزارغ وباسكال، وقام بتدقيقه لاحقاً كل من ج. ستاينر[32] (1796 ـ 1863)

(32) يعرّف ستاينر المخروطي كمحلّ تقاطعات الأشعة المتقابلة إسقاطياً في حزمتيْن مسطّحتين غير مرئيتين. والمقابلة الإسقاطية بين حزمتين هي تحويل يحفظ النسبة المتصالبة للأشعة كخاصيّة إسقاطية بحتة. وتوصف حزمتان إسقاطيتان بأنهما غير مرئيتين إذا اشتركتا في شعاع مقابل ذاته.

وفون ستولد[33] (1798 ـ 1867). والملاحظة الثانية تتعلّق بالخاصيّة العامة للصنويّة. وسبق أن ظهرت فوراً في وصف الرسمين : رسم باسكال بسبعة مستقيمات وتسع نقاط؛ ورسم بريانشون بسبع نقاط وتسعة مستقيمات، ففي المسطح يتوافق بصورة مع تشكّل من النقاط والمستقيمات تشكّل من المستقيمات والنقاط ينقل خاصيّة الأوّل كما سبق أن رأينا في مبرهنتي باسكال وبريانشون وفي مبرهنة ديزارغ التي هي ذاتية الصنويّة.

لكن لهذين الرسمين المنتهيين علاقات خاصّة جداً مع المرور من المسطّح إلى الفضاء ثلاثيّ الأبعاد، فيكوّنان إذاً مثالاً جديداً من ظواهر تهمّنا الآن وتتعلّق بالنتائج الإجماليّة للخصائص الإسقاطية. ولنسجّل قبل كل شيء أن لباسكال ـ بريانشون ولديزارغ تفسيراً في المسطّح وتفسيراً في الفضاء، فحالة ديزارغ من الناحية الحدسيّة واضحة جداً: إذا كان المثّلثان المتقابلان في مسطّحين مختلفين، فإنّ تقاطع هذين الأخيرين ـ وهذا واضح ـ يكون خطاً مستقيماً يتضمّن التقاطعات الثلاثة للمسطّحات المارّة بالأضلع المتقابلة في المثلّثين.

إن مجرّد علاقات الالتقاء وحدها تسمح إذاً بالاستدلال على مبرهنة ديزارغ في الفضاء. لكن الاستدلال عليه في المسطّح، إذا لم نقتصر في ذلك على اسقاط الشكل الفضائي على مسطّح مع افتراض معرفتنا بذلك الرسم، يتطلب بالإضافة إلى ذلك استعمال مباده الترتيب والتطابق. ولكن من دون استعمال مبده الاستمرارية. ويمكن الاستدلال على مبرهنة باسكال بريانشون في الفضاء باستعمال خصائص سطح من الدّرجة الثانية مشتقّ من المخروطيّات هو من

(33) يدخل فون ستولد مفهوم القطبية، وهو تحويل إسقاطي خاصّ يقرن نقطة القطب بمستقيم، هو قطبيّها المخروطي. هو إذاً محلّ النقاط المنتمية إلى قطبَيْها، أو غلاف المستقيمات التي تتضمّن قطبها.

طبيعة إسقاطية بحتة على أن يستوجب ذلك الاستدلال اتخاذ مباده الترتيب ومبده أرخميدس للاستمرارية. هذا من ناحية ومن ناحية أخرى، يمكن أن تثبت مبرهنة ديزارغ في المسطّح بافتراض التعويل على مباده الالتقاء والترتيب والتوازي في المسطّح من دون سواها. والخلاصة التي توصّل إليها بعد دراسة مفصّلة هي الآتية:

أ ـ مبرهنة ديزارغ، إذا ما نظرنا إليها كمبده في المسطّح، هي الشرط اللازم والكافي لإدراج هندسة مسطّحة في الهندسة الفضائيّة.

ب ـ مبرهنات الالتقاء البحت في هندسة ما ترجع إلى توليف (توفيق) عدد متناه من رسوم باسكال.

إذاً نستطيع أن نقول مع هيلبرت[34] بأن مبرهنة ديزارغ «هي على نحو ما النتيجة في الهندسة المسطّحة لحذف مباده الفضاء»، ومع هيلبرت وكوهن ـ فوسان[35] «أنّ مبرهنة باسكال هي الوحيدة في الالتقاء ذات الدلالة في المسطّح وأن رسمه هو أهمّ رسم في الهندسة المسطّحة»[36].

5 ـ الأشكال الإسقاطية والمتريّات

5.1 ـ تعرّف الرسوم في الفضاء الأسقاطي من دون اعتبار أي

---

(34) David Hilbert, *Les Fondements de la géométrie*, éd. critique avec introd. et compléments préparée par Paul Rossier (Paris: Dunod, 1971), p. 145.

(35) David Hilbert and S. Cohn-Vóssen, *Geometry and the Imagination* = *Grundlagen der geometrie*, Translated by P. Nemenyi (New York: Chelsea Pub. Co., 1952).

(36) Hilbert, Ibid., le théorème de Desargues et le théorème de Pascal, pp. 122-158, et Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, introduction de Jean-Toussaint Desanti; préface de Henri Cartan ([Paris]: Hermann, 1981), pp. 66-75.

قياس للمقادير، بيد أنّ ديزارغ نفسه يميّز بين الخصائص اللامتغيّرة بالإسقاط بواسطة علاقات متريّة وبذلك تكون المبرهنة الأساسية في مسودّة المشروع صياغة لعلاقة متريّة بين الإحداثيات السينيّة لنقاط التقاطع الستّ بين مستقيم في المسطّح ومخروط وبين المستقيم والأضلاع الأربعة لرباعيّ كامل محاط به (أو أضلاع الرباعي الأربعة وقطريه) ـ . . . علاقة لا تتغيّر بالإسقاط المركزي وهي بالتالي مستقلة عن طبيعة المخروط والقيم العددية للإحداثيات السينيّة. إذاً نقول إن الأزواج الثلاثة من النقاط هي في «ارتداد» إضافة إلى ذلك يعترف عالم الهندسة الليوني صراحة بأن هذه العلاقة تعرّف تحوّل كل نقطة من الزوج إلى النقطة الأخرى، وبأن معرفة زوجين من النقاط المتقابلة كافية لتثبيت تحويل المستقيم إلى ذاته[37].

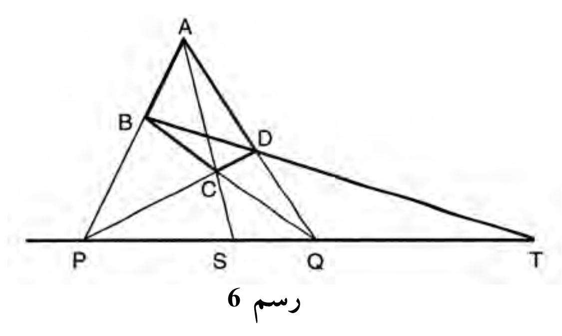
إن من الواجب إذاً طرح السؤال: أي علاقة ترعاها الصياغة المتريّة، غير الوثيقة الصلة بالموضوع ظاهرياً، في خاصّية كهذه مع طبيعتها الإسقاطية العميقة؟ في مؤلَّفه **أسس الهندسة**، قدّم هيلبرت لها حلاً ببنائه بطريقة إسقاطية بحتة «حساب القطع» التي يقرن بها أعداداً، من دون أن يكون لهذه الأعداد المعنى الحرفي للقياس. طريقة أخرى اقترحها ف. كلين تبيِّن بوضوح معنى هذا الإدخال للمقادير العدديّة في الفضاء الإسقاطي. والمقصود هو بناء سلّم مرتّب على المستقيم يقرن إذاً بكل نقطة من النقاط عدداً حقيقياً، يمكّن هكذا بأن تخصّ بإحداثية، ولكن من دون أن تكون هذه الإحداثية قياس المسافة التي تفصلها عن الأصل.

لم يستند في هذا البناء إطلاقاً إلى مباده التطابق المؤسّسة لمتريّة، الغائبة كما رأيناها عن المنظومة الإسقاطية. المتصوّر الحاسم

---

(37) إن كلمة «ارتداد» بالمعنى نفسه الذي أوردناه حول باخمان (3.2 §). هذا يعني ان هذا التحول المتكرر يعطي النقطة الأساسية: $f (fM) = M$، انها إذاً مماثلة لعكسها.

هو متصوّر القسمة المتناسقة، المعرّفة والمبنيّة بطريقة إسقاطية بحتة بواسطة رباعي الأضلاع الكامل.



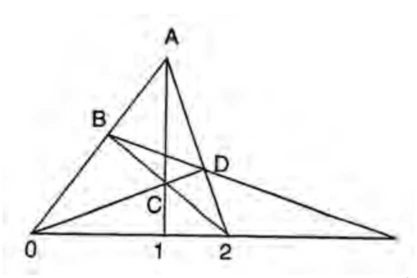
رسم 6

نأخذ في الاعتبار رباعي الأضلاع الكامل ABCD ونقطتي التقاطع P, Q لزوجي أضلاعه المتقابلة. نقطتا تقاطع قطريه S,T مع المستقيم في المسطّح المارّ بالنقطة P والنقطة Q تشكّلان زوجا متناسقاً مع P, Q، إحدى النقطتين S تقع داخل المقطع PQ والأخرى T خارجها. طبعاً، في الهندسة الإقليدية لأطوال القطع معنى ونبرهن عندئذ على أن SP/SQ: TP/TQ = -1.

لكننا لن نستعمل أبداً هذه الصياغة المتريّة، فوحدانيّة بناء النقطة الرابعة في القسمة عندما تكون النقاط الثلاث الأخرى معروفة تضمن الأساس السليم لتعريف «المتناسق الرابع».

كي نبني سلّماً إسقاطياً على المستقيم، نعين نقطة الأصل 0، ونقطة تُختار كيفياً نسمّيها 1 ونقطة اسمها نقطة اللانهاية، يمكن أن تختار كذلك كيفيّاً مثلما رأينا على الخطّ الإسقاطي. سوف يشار إلى القرين النسقي الخارجي للانهاية بالنسبة للزوج (0, 1) بالعدد 2، مماثلة في الهندسة المتريّة حيث يشار إلى مرافق اللانهاية التوفيقي الداخلي بالنسبة للزوج (0, 2) بالعدد 1، منتصف القطعة (0, 2). وهكذا، خطوة خطوة، تتمّ تسمية نقاط اللانهاية المترافقة التوفيقية

يمين الأصل، بمتتالية الأعداد الصحيحة وبالطريقة نفسها سوف نسمي مرافق اللانهاية التوفيقي الداخلي بالنسبة للزوج (1 ,0) 2/ 1.



رباعي الأضلاع ABCD المستخدم في بناء مُرافق الصفر التوفيقي بالنسبة إلى 1 واللانهاية.

رسم 7

هكذا نستطيع أن نسمّي النقاط إلى يسار الصفر والنقاط الواقعة بين الأعداد الصحيحة المتعاقبة بالإعداد الثنائية $n/2^m$ حيث n تتغيّر بين 1- و∞ وحيث m تتغير بين 1 و∞. ويسمح المبده الإسقاطي للاستمرارية بأنّ نبيّن، نظراً لكثافة تلك الأعداد من جهة الأعداد الحقيقية، أنّ في الإمكان تسمية كل نقطة من نقاط المستقيم بعدد وسوف يكون ذلك العدد إحداثيّتها الإسقاطية من دون أن يكون البتّة قياساً لبعدها عن الأصل.

والصّفة المميّزة لها هي أن الإحداثيّة الإسقاطيّة للنقطة المرافقة للانهاية بالنسبة إلى نقطتين على المستقيم هي متوسط إحداثيّتي هاتين الأخيرتين.

بيد أنّ إضفاء مثل تلك المؤشرات على نقاط المستقيم وإضفاء مؤشرات زوجية على نقاط المسطّح ومؤشرات ثلاثية على نقاط الفضاء يسمح بالتمثيل الجبري للأشكال الإسقاطية، فنبيّن فعلاً أن

مستقيماً في مسطّح يعرّف في الإحداثيّات الإسقاطيّة (x, y) بمعادلة على شكل $Ax + By + C = 0$، والمعادلة بخصوص مسطّح في الفضاء هي على شكل: $Ax + By + Cz + D = 0$. غير أن النقطة المختارة على المستقيم كنقطة اللانهاية ليس لها إحداثيّة إسقاطيّة. ولكي نعطي تمثيلاً كاملاً للمستقيم، نبني إذاً منظومة من الإحداثيّات المتجانسة خاصّين نقطة اللانهاية بزوج من المؤشّرات حدّه الثاني هو الصفر؛ وتخصّ النقاط الأخرى على المستقيم بإحداثيّات متجانسة هي أزواج من الأعداد بحيث يكون حاصل قسمة العددين في الزوج مساوياً للإحداثيّة الإسقاطيّة للنقطة المؤشّرة. وسوف يخصّ كذلك نقاط المسطّح أو الفضاء بثلاث إحداثيات متجانسة أو أربع. في هذا التمثيل، مفهوم التحويل الإسقاطي، المحافظ تقابليّاً على الأشكال، من نقطة ومستقيم ومسطّح، يتوافق جبرياً مع مفهوم دالّة خطية ما لكن مصفوفتها ليست صفراً (وإلا، بما أن التحويل ليس غير قابل للنكس فلا وجود للتقابليّة).

وعلى نحو أكثر تجريداً أيضاً نجد بناء أ. أرتين في **جبره الهندسي** (1962) الذي لا يستهدف إيجاد منظومة من الأعداد بل على نحو أعمّ إيجاد جسم من الداليّات الخطّية يمكن أن تستخدم عناصره إحداثيّات لنقاط المسطّح الإسقاطي. بداية يأخذ أرتين بالاعتبار تحويلات إسقاطية بسيطة في المسطّح يدوّنها τ ويسمِّيها «إزاحات» بالتشابه مع الإزاحات الإقليدية. ومن ثم تشاكلات متّصلة. . . $\alpha, \beta,$ على هذه الإزاحات يدوّن تطبيقها على التحويلات ....$\tau\ \tau^{\alpha}, \tau^{\beta}$ وبواسطة بعض المباده تشكّل تلك التشاكلات المتّصلة جسماً تستعمل عناصره كإحداثيّات لنقاط المسطّح. ويبيّن أرتين أن الخصائص الإسقاطيّة لرسوم هذا المسطّح تتوافق عندئذ مع الخصائص الجبريّة لزمرة الإزاحات ولجسم التشاكلات المتّصلة، فعلى سبيل المثال

يتوافق ديزارغ مع المبده الذي يؤكّد بأنّ زمرة الإزاحات تعمل بتعدّ على المسطّح[38]، أما باسكال فيتكافأ مع تبادليّة جسم التشاكلات.

نرى بأن وجهة النظر الإسقاطية، من دون أيِّ تخلٍّ عن ميزتها غير المتريّة، تسمح بأن تفسّر خصائص الرّسوم جبريّاً في منظومة مجرّدة، هذا ما أوحت به لنا نظرية ج. يلمسلاف مع ف. باخمان اللايبنيزيّة جداً (الفقرة 2.3). ومع ذلك، يجب ألاّ ننسى أنّ الانتقال إلى الفضاء الحدسي الإقليدي هو الذي يظهر ثانية مواصفة الأشكال، كما يبيّن ذلك التنوّع التكويني للمخروطيّات الذي يلغيه تعريفها الإسقاطي. هذا التنوّع يرتبط فعلاً بإحياء تفرّد العناصر في اللانهاية، التي تميّز عندئذ بين القطع الزائد والقطع المكافئ عن الدائرة والقطع الناقص، وبإدخال قياسات المسافة، تتميّز الدائرة عن القطع الناقص.

لكن جبرنة الأشكال ببناء إحداثيات إسقاطية، من دون افتراض متريّة، يسمح بابتكار أساسي هو إدخال عناصر تخيّلية ؛ فسوف تكون دائما لمنحنى من الدرجة m في الإحداثيات الإسقاطيةً نقاط تقاطع عددها m، حقيقية أو تخيلية، أصيلة أو غير أصيلة، مع مستقيم إسقاطي.

هكذا، سمح اكتشاف التحويلات الإسقاطيّة واستثمارها باستنفار الشكل في المواضيع الهندسية وضبط تشوّهاته، فالشكل لم يعد صفة ذاتيّة للموضوع الفضائي، بل هو لامتغيّر لتحويلاته، سوف يظهر علم الفضاء خصائصه يوماً. أما التحويلات نفسها فتكوّن منظومات تعرّف، على مستوى تجريدي أعلى، أشكال الفضائية. ويكتشف، أواخر

(38) هذا يعني أنه بخصوص أي نقطتين يوجد دائماً نقطة في الزمرة تحوّل إحداهما إلى الأخرى.

القرن التاسع عشر، أن سلسلة الهندسات ممكنة، سلسلة تثبت، على نحو ما، في مجموعها الأشكال اللامتغيّرة لمنظومة محدّدة من التحويلات. هذا الاكتشاف هو الذي سنهتمّ به في الفصل القادم.

الفصل الثاني
استقرار منظومات الأشكال وتراتب الهندسات

في الفصل السابق، أخذنا في الاعتبار استنفار نظرية الفضاء الإسقاطية في البداية لأشكال المواضيع الهندسية. وسينصبّ اهتمامنا الآن على تحديد منظومات الأشكال وتراتب هندساتها، فمن منظور جان كافاييس[1]، ننتقل هنا من تأسيس «الموازين» إلى «مضمونيّة»، تتناول عمليّات بناء مواضيع المستوى الأول عينَها، التي هي في هذه الحالة الرّسوم الفضائيّة. قواعد تنسيق هذه العمليّات في منظومات هي التي ستظهر الآن كمبحث جوهري في فكرة الفضاء، تحت اسم «هندسات». ولن تكون اللازمة الأصلية لهذا البناء الجديد ومناسبة قيامه النظريّة الإسقاطيّة أوّلاً، بل اكتشاف فضاءات ممكنة غير إقليدية. على أي حال، سنرى أنه، بالنسبة إلى آرثر كايلاي وفليكس كلين، الباعثين الحقيقيّين لوجهة النظر هذه بخصوص تراتبية الهندسات، يبقى الإسقاط شكلاً للفضائيّة، أساسيّاً وأصليّاً على نحو ما. لكن نقطة الانطلاق التاريخيّة البعيدة هي تأمّل نقدي في بديهيات الفكر الإقليدي حول الفضاء، وبداية طبعاً في المسلّمة الخامسة من

(1) انظر على سبيل المثال: Jean Cavaillès, *Sur La Logique et la théorie de la science*, 3. éd. (Paris: J. Vrin, 1976), pp. 27-33.

الكتاب الأول من «الأصول»، فمن المناسب إذاً أن نذكّر بملامح ما يشكّل ما قبل تاريخ نظريّة منظومات الأشكال تلك.

1 ـ ماقبل التاريخ[2]

1.1 ـ المسلّمة الخامسة في الكتاب الأول من أصول إقليدس هي التي طرحت، منذ القدم، مسألة، قادت تطوّراتها إلى الاعتراف بإمكانيّة تعدّد أشكال الفضائيّة، وصيغتها هي الآتية:

«إذا أسقط مستقيم على مستقيمين محدثاً زاويتين داخليّتين من نفس الجهة أقل من زاويتين قائمتين فإنّ ذينك المستقيمين سيتقاطعان بعد مدّهما إلى اللانهاية من الجهة التي تكون فيه الزاويتان أقلّ من زاويتين قائمتين (ترجمة ب. فيتراك عن نص هايبرغ).

حاول علماء الهندسة باكراً إثبات المسلّمة (طلب يكون تصديقه موضع شك) مقتصرين على استخدام القضايا الست وعشرين الأولى من الكتاب، وقد تفطنوا إلى أنّ المسلّمة توكّد وجود موازٍ، وهذا مفهوم تم تعريفه سابقاً (التعريف 23، لكنه لم يستخدم إلاّ انطلاقاً من القضيّة 27). وترجع أول محاولة من دون شك، حسب بروكليس (القرن الخامس بعد الميلاد) إلى بطليموس (نحو 150 ـ 125 بعد الميلاد). وغالباً ما أعيد إحياؤها بمهارة وكفاءة على أيدي الرياضيّين العرب من القرن التاسع إلى القرن الرابع عشر[3]، ولكن من دون أن

---

(2) بخصوص هذه النقطة انظر: Houzel, «Histoire de la théorie des parallèles,» dans: Roshdi Rashed, *Mathématique et philosophie dans l'antiquité et l'âge classique* (Paris: CNRS., 1991); *Histoire des sciences arabes*, sous la dir. de Roshdi Rashed; avec la collab. de Régis Morelon (Paris: Ed. du Seuil, 1997-), et Rosenfeld et Youshkevich, «Géométrie», p. 121.

(3) بخصوص دراسة أكثر تفصيلاً انظر أيضاً: Roberto Bonola, *Non Euclidean Geometry* ([New York]: Dover Publications, [1955]).

يُعترف بكمال صحّة البرهان. وسيعيد علماء الهندسة الغربيّون، تناول المسألة بعد معرفة ببعض المحاولات العربية أحيانا على غرار: واليس (1703 ـ 1616)، ساكشِري (1733)، لامبير (1763)، لوجاندر (1823 ـ 1752)، ولكن من دون مزيد من النجاح. لماذا كل ذلك الفشل؟ لوحظ بسهولة بعد فوات الأوان أنّ عالم الهندسة يستعمل في برهانه قضيّة لا يعرف أنها تتكافأ مع المسلّمة نفسها، أو أنه يرتكز على خصائص حدسيّة، جليّة على الرسم، لكن البرهنة الدقيقة عليها ـ وهو لا يقوم بها أبداً ـ تستدعي مسلّمة إقليدس.

1.2 ـ برغم ذلك، أظهرت هذه المحاولات المختلفة، بقبول مسلّمات وتعاريف إقليدس الأخرى، التكافؤ المنطقي بين المسلّمة الخامسة وبين قضايا أخرى مختلفة، قبولها من خلال الحدس الفوري للفضاء أسهل نذكر منها على سبيل المثال: وجود مواز وحيد لمستقيم، في نفس المسطّح يمرّ من نقطة معينة في هذا الأخير. أو أيضاً، القضيّة I.32 في الأصول: مجموع الزوايا في مثلّث يساوي زاويتين قائمتين؛ أو أيضاً: يوجد دائماً مثلّث أحد أضلاعه محدّد يتماثل مع مثلّث معروف (واليس ولابلاس)؛ وفي النهاية في حال بطلان المسلمة الخامسة: إذا كان مجموع الزوايا في مثلّث أصغر من زاويتين قائمتين، فنقصان المجموع عن الزاويتين القائمتين يتناسب مع مساحة المثلث (لامبير).

فضلاً عن ذلك، ظهر خلال هذا التاريخ الغابر، عند الخيّام والطوسي، رباعيُّ الزوايا المشهورُ المنسوب إلى ساكشِري[4]، فعالِم

(4) Girolamo Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, auctore Hieronymo Saccherio* (Mediolani: typis P. A. Montani, 1733).

الهندسة البافي (من بافي Pavie) يأخذ في الاعتبار رباعيّاً، مستويا ضلعين من أضلاعه متساويان ومتعامدان مع القاعدة، ويتفحّص ثلاث فرضيّات على القيمة، المبيّنة مشتركة، للزاويتين الباقيتين: قائمتين، حادّتين أو منفرجتين. حالة الزاوية القائمة هي بوضوح الحالة التي تستوفي المسلّمة الخامسة وجميع مبرهنات إقليدس؛ ساكشري يستبعد فرضيّة الزاوية المنفرجة، مبرهناً بأنها تقود إلى تناقض، في حال افترضنا أن طول المستقيمين لامتناه. وفي محاولته إثبات أنّ فرضيّة الزاوية الحادّة تقود أيضاً إلى تناقض، يبرهن على أنه، بهذا الافتراض، يوجد، انطلاقاً من أي نقطة، حزمة من المستقيمات، لا تتقاطع مع مستقيم محدّد في المسطّح، ولها معه متعامد مشترك. إنها تتباعد إلى ما لا نهاية نحو اليمين أو نحو اليسار ويفصل مستقيمان حدوديّان هذه الحزمة عن حزمات المستقيمات التي تتقاطع مع المستقيم المعيّن؛ وهما مقاربان له، من ناحية اليمين ومن ناحية اليسار على التوالي. هذان هما الموازيان بمعنى لوباتشفسكي. قضيّة يرى هذا العالم بالهندسة أنها لا تتناقض إطلاقاً مع بقيّة المسلّمات، وستصبح مبرهنة في هندسته وفي هندسة بولياي، لكنه يستبعدها «كمنافية لطبيعة المستقيم». وهكذا مهما كانت الخصائص التي برهنوا عليها في فرضيّة الزاوية الحادّة، فإنّ جميع هؤلاء العارفين بالهندسة كانوا يأملون دائماً أن يروا خلفها بعض التناقض أو الخروج عن المقام.

2 ـ الهندسات غير الإقليدية كأشكال للفضائية

2.1 ـ إذاً يجب تأريخ ولادة الهندسات غير الإقليدية مع اللحظة التي قبل فيها بعضُ الرياضييّن فكرة شكل من الفضائيّة تنتفي فيه المسلّمة الخامسة، وطوّروا تبعات ذلك من دون أحكام مسبقة، معترفين باستقلال هذه المسلّمة عن مسلّمات كتاب إقليدس.

لا شك أن غاوس (Gauss) هو أوّل من قام بالخطوة، وإذا لم

يجرؤ على نشر أفكاره في البداية خوفاً من زعيق «بليدي الذهن»، فإنّ مراسلاته وتدويناته غير المنشورة تبيّن أن اقتناعه بإمكانيّة تأسيس «هندسة غير إقليدية» ـ والكلمة له ـ يعود من دون شك إلى العام 1813. في ذات الوقت تقريباً، أعدّ شويكارت (1818: «هندسة الكواكب»)، ثم تورينوس (في هندساته الأوّلية الأصليّة، 1826) مشروع هندسات من دون مسلّمة إقليدس. وانتهى ن. أ. لوباتشفسكي وجانوس بولياي أخيراً إلى إقرار هندسة غير إقليدية واستثمارها منهجيّاً.

قدّم لوباتشفسكي في العام 1826 في جامعة كازان «عرضاً موجزاً عن مبادئ الهندسة مع إثبات محكم لمبرهنة الموازيات»، يفصّل فيه هندسة تتعلّق بفرضيّة الزاوية الحادّة. وقد نشر بين العام 1829 والعام 1855 عدّة محاضرات حول هذه الهندسة الجديدة التي نعتها أولاً «بالتخيّليّة»، ثمّ «بالهندسة الشاملة»، فطوّر، في فرضيّة الزاوية الحادّة، حساب المثلّثات الكرويّ. وكتب في نظريّته حول الموازيات في العام 1840:

إن هذه الفرضيّة «يمكن أن تقبل [كما تقبل الفرضيّة الإقليدية، للزاوية القائمة] من دون أن تقود إلى أي تناقض في النتائج، وتؤسّس لعلم هندسي جديد، أسمّيه هندسة تخيليّة»[5].

وبمعزل عن الشاب الروسي الكازاني، فإن ضابطاً هنغارياً شاباً، هو جونوس بولياي، وقد أدرك فشله في البرهنة على المسلّمة الخامسة، انتهى، وفق تعبيره بالذات، «إلى خلق كون انطلاقاً من لا شيء»[6]. وقد نشر اكتشافه في العام 1829، في مؤلّف لأبيه، تحت

---

(5) ترجمة هالستيد في: Bonala, Ibid., p. 19.

(6) رسالة في الثالث من تشرين الثاني/ نوفمبر سنة 1823 إلى وولفغانغ، ذكرها بونولا، في: المصدر نفسه، ص 98.

عنوان: **ملحق حول علم فضائي مطلق.** والبديهيّة الحادية عشرة المذكورة في العنوان هي قطعاً تلك التي تقول عنها طبعة هايبرغ إنها الخامسة، فالأمر يتعلّق إذاً بهندسة «مطلقة»، أي إنها صالحة بمعزل عن المسلّمة الخامسة، بدلاً من قيامها على فرضيّة نفيها. وفي كتابه **العلم المطلق** (*Scientia absolute*) ينظر في:

«منظومة الهندسة المرتكزة على فرضيّة صحّة المسلّمة الخامسة، المسمّاة Σ، والمنظومة القائمة «على فرضيّة العكس [أي فرضية الزاوية الحادّة] المسمّاة S. كل ما لا يعبّر عن وجوده صراحة في Σ أو في S يفهم كمنطوق مطلق، أي مؤكّد سواء تحقّقت المنظومة Σ أو المنظومة S» (الفقرة 15).

على أنّ زاوية ساكشري، بمستقيمين غير منتهيين وفي الهندسة المطلقة لا يمكن أن تكون إلا قائمة أو حادّة، هذا ما كان يعرفه لوجاندر من قبل، فلدى بولياي ولوباتشفسكي، لا تتعلق المنظومة S غير الإقليدية إذاً إلا بحالة الزاوية الحادّة. لكن بولياي أسّس حساب المثلثات الكرويّ من دون أن يستعمل (أو ينفي) المسلّمة الخامسة (الفقرة 26) فجرّ إلى أن يُدخل ثابتاً في صيغه المثلثية، وبجنوح ذلك الثابت نحو اللانهاية، تصبح كل صيغة تتضمّنه معبّرة عن الكميّة المأخوذة في الاعتبار في الفرضيّة الإقليدية Σ. لكن بولياي يلاحظ:

«ليست المنظومة نفسها هي التي تتغيّر (لأنها تتحدّد بالكامل في ذاتها وبذاتها)، بل الفرضيّة التي يمكن أن تثبّت بطريقة أخرى ما لم تقد إلى الخروج عن المنطق» (الفقرة 32).

ويتّضح لنا هنا مدى جلاء الرؤية لدى بولياي عند تفكيره في منظومة أشكال فضائية كموضوع معّين ومحدّد لذاته مستقلّ عن محققاته الممكنة المرتبطة هاهنا بثابت سوف يبيّن ريمان أنّ في

الإمكان تفسيره كانحناء (تقوس) في الفضاء.

2.2 ـ ولكن إذا كان هذا هو هدف المجريّ، في «علمه المطلق الفضائي»، فهو نفسه، ولوباتشفسكي، لم يطوّرا سوى حالة خاصّة هي حالة الزاوية الحادة، فهما لم يتطرّقا فعلاً إلا لشكل واحد من نفي المسلّمة الخامسة، أو لمكافئ لها: من نقطة يوجد مواز واحد ووحيد مستقيم معيّن في المسطّح. وعندئذ ننفي فقط وحدانيّة الموازي، ولا وجوده، وينجرّ عن ذلك أن الزاوية في رباعي أضلاع ساكشري حادّة، وأن مجموع زوايا المثلّث أصغر من زاويتين قائمتين، وأنّ لدينا هندسة القطع الزائد للوباتشفسكي وبولياي.

لكننا نستطيع أن ننفي مع ريمان، وجود الموازي بالذات، وفي هذه الحال تكون زاوية رباعي أضلاع ساكشري منفرجة ويكون مجموع زوايا المثلّث أكبر من زاويتين قائمتين. وصحيح أنه إذا احتفظنا ببديهيّة الاستمراريّة لأرخميدس، استبعدت حالة الزاوية المنفرجة لوجود تناقض في حالة المستقيم غير المنتهي (لوجاندر ومن قبله ساكشري). إلا أن ذلك التناقض ينتفي إذا اعتبر المستقيم خطّاً مغلقاً، ليس لانهائيّاً بل غير محدود فقط. أحد الجوانب المبدعة في وجهة نظر ريمان هي اعتبار هندسة المستوى غير الإقليدي بمثابة تحديد دقيق للأشكال المرسومة على سطح[7] غاطس في فضاء ثلاثي الأبعاد. والخاصّية الفاصلة لهذا السطح هي عندئذ تقوّسه، معّيناً على أيدي غاوس وريمان بلغة تفاضليّة، والذي سوف نهتم به في معرض ما سنسمّيه نسيج الفضاء وفي سياق متصوّر المتنوّعة ومن وجهة النظر

---

(7) سنرى أن هذا المفهوم الحدسي للسطح قد أمكن استبداله بتصوّر شكلي للمتنوّعة، بحيث إنه لم يعد من اللازم الغوص في الفضاء الإقليدي الثلاثي الأبعاد، بل أخْذ خصائصه الذاتية بالاعتبار مباشرة.

هذه، يتطابق ثبات هذا التقوّس مع الخاصّية المألوفة حدسيّاً في المستوى وفي الكرة، إذ يمكن زحلقة هذه السطوح على نفسها، أو على الأقل زحلقة أجزاء صغيرة منها، من دون تشويه الرّسوم المنشورة عليها. والمستوى العادي هو بالطبع مرتكز هندسة إقليدية. ونبيّن عندئذ بأن سطحاً ما نسمّيه «كرة وهميّة»، سلبيّ ثابت التقوّس، هو المرتكز لهندسة لوباتشفسكي ـ بولياي. أمّا فرضيّة الزاوية المنفرجة، غير الإقليدية فإنها تفضي عندئذ إلى حالتين كان إقرار بلترامي[8] ثم كلين بهما أوضح من إقرار ريمان نفسه. والسّمة المميّزة الأبسط هي أنّ مستقيمين في إحدى الحالتين (هندسة القطع الناقص) يشتركان دائماً في نقطة واحدة وحيدة وفي الأخرى (الهندسة الكروية) في نقطتين دائماً. ومثلما هو الحال بالنسبة للكرة، تخطّ الرّسوم في المستوي غير الإقليدي في الهندسة الكروية، على سطح ذي جانبين في حين ترسم في الهندسة الإهليلجية (هندسة القطع الناقص) على سطح أحادي الجانب سبق أن صادفناها كتمثيل للمستوي الإسقاطي. هو سطح مغلق لكنه سطح لا يتقاطع فيه مستقيمان إلاّ في نقطة وحيدة دائماً قد تكون عَرَضاً نقطة اللانهاية الوحيدة في المستوي الإسقاطي.

هذه الفكرة في أن يُعتبر شكل فضاء من بعدين كسطح ذي تقوّس غاطس في فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد ترجع إلي الطرح العام لتمثيل هندسة من خلال نموذج في هندسة أخرى، وهو طرح أساسي قطعاً لإمكانية قيام فكرة الفضاء نفسها. إذ بهذه الطريقة تظهر بوضوح الميزة الميتاصوريّة تقريباً لهندسة، حيث أشكالها من المستوى الأول

(8) Beltrami, «Teoria fondamentale degli spazzi di curvature costante» *Ann. di matematica*, 2, II (1868), p. 354.

يمكن أن تتوافق مع أشكال أخرى في هندسة أخرى. وعندما تمثّل منظومة مواضيع غير إقليدية من خلال مواضيع إقليدية، ما يحافظ عليه هو بعض علاقات بنيويّة للمواضيع الأساسيّة، من «نقاط»، و«مستقيمات»، و«مستويات»، تشكّلها قابل للتشويه الجذري؛ ولكنّ من الواجب أيضاً أن تتوافق نقطة نقطة تحويلات الرسوم تحويلاً تقابليّاً، وسننظر فيها عن قريب. وحالة هندستي الزاوية المنفرجة الريمانيتين بخصوص المستوى هي بهذا الصدد بسيطة نموذجية. وقد تمدّنا بنموذج للحالة الكروية باقة أشعّة موجّهة من البؤرة وباقة مستويات مارّة من تلك النقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثيّ الأبعاد ولنا في باقة من المستقيمات غير الموجّهة وفي المسطّحات المارّة من نفس النقطة نموذج للهندسة الإهليلجية وفي الحالة الأخيرة يمثل المستقيم نقطة في مستوى ريمان الإهليلجي، بينما يمثل المستوى في الباقة مستقيماً؛ وهكذا نرى أنّ مستويين من هذا القبيل يتقاطعان دائماً في مستقيم وحيد مشترك (لمستقيمين في المستوى الإهليلجي نقطة مشتركة وحيدة). في الحالة الأولى يمثّل الشعاع في الحزمة نقطة في المستوى الكروي، ويمثّل المستوى فيها مستقيماً في المستوى الكروي؛ فنرى إذاً أن مستويين في الحزمة يتقاطعان دائماً وفق شعاع وشعاعه المقابل (في المستوى الكروي يشترك مستقيمان في نقطتين دائماً). ولكن تمثيل المثلّث في الحالتين هو ثلاثيّ سطوح، يكون فيه مجموع زوجيّات السّطوح الممثّل لمجموع زوايا المثلّث أكبر من زاويتين قائمتين.

لكن نماذج غير إقليدية يمكن أن تبنى أيضاً على المستوى الإقليدي نفسه بإعطاء معنى جديد لأسماء المواضيع الأساسيّة[9]،

---

(9) جميع الخصائص غير الإقليدية لها قرين إقليدي في النموذج، لكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

ففي نموذج بوانكاريه بخصوص هندسة لوباتشفسكي، «النقاط» هي نقاط نصف مستو أعلى يحدّه مستقيم، و«المستقيمات» هي أنصاف المحيطات في ذلك المستوى الأعلى، المتراكزة على المستقيم والمتعامدة عليه إذاً، وهي، في الحالة القصوى، أنصاف المستقيمات المتعامدة عليه أيضاً. نستطيع أن نعرّف في هذا النموذج تطابق قطع «المستقيمات»(10) والنموذج يستوفي عندئذ بديهيات الالتقاء، والرتبة، والتطابق، والتواصل في الهندسة المطلقة. لكنه لا يستوفي مسلّمة إقليدس الخامسة، بل مسلّمة لوباتشفسكي، فمن نقطة في المستوى الأعلى نستطيع أن نرسم فعلاً عدداً لانهائيّاً من أنصاف الدوائر المتعامدة مع المستقيم القاعدي والتي لا تتقاطع مع دائرة معيّنة ومن نقطة لوباتشفسكية يمكن أن نرسم حزمة من «المستقيمات» اللوباتشفسكية لا تتقاطع مع «مستقيم لوباتشفسكيّ معيّن.

2.3 ـ يجدر أن نقدّم ملاحظتين بخصوص هذه التمثيلات. قبل كل شيء يفترض التمثيل الكامل لشكل فضائيّة غير إقليدية كهندسة سطح (متنوعة وهو مفهوم أعمّ سندخله في القسم الثالث من هذا المؤلّف) تأسيس متريّة، أي تعريف شروط قياس المسافات بين نقطتين في فضاء، وهي مسألة ستدرس مطوّلاً في القسم الأخير من هذا الكتاب، «تعليم وقياس». تقود وجهة نظر ريمان التي طوّرها بلترامي(11) إذاً إلى أن نحدّد بواسطة شكل تفاضلي في منظومة إحداثيّات، متريّة سطح «طبيعيّ»، أي يستوفي خصائص، تتشابه بمعنى من المعاني مع خصائص الرّسوم الإقليدية، في الحالات غير

(10) قوسان في الدوائر الإقليدية في النموذج يتوافقان مع «قطعتين» غير إقليديتين متطابقتين إذا أمكن الانتقال من أحدهما إلى الآخر من خلال متتالية من التعاكسات بالنسبة إلى دوائر متعامدة مع مستقيم القاعدة.

(11) Beltrami, Ibid.

الإقليدية. هي بخصوص حالة لوباتشفسكي، على سبيل المثال، متريّة سطح يُدعى «كرة وهميّة» تقوّسه ثابت سلبي[12]، وبخصوص حالتي الزاوية المنفرجة، هي متريّات الكرة، والمتريّة التي نستطيع أن نزوّد بها المستوى الإسقاطي وعندئذ المستقيمات هي جوادز السطح، أي خطوط أقصر المسافة بين نقطتين.

والملاحظة الثانية هي أن هذه التمثيلات لا تصلح بصفة عامّة إلا محلياً، أي بخصوص رسوم منزلة في مجالات صغيرة من السطح الممثّل. ونرى ذلك بسهولة في مثال الأسطوانة البسيط، التي تتطابق هندستها المحليّة مع هندسة المستوى الإقليدي، لكن بنيتها الإجماليّة مختلفة جذرياً بما أنّ بعض «المستقيمات» (الموازيات) فيها محدودة ومقفلة، وأنّ أخرى (الهاجريّات واللوالب) غير منتهية. لقد بيّن هيلبرت، على سبيل المثال، ألاّ وجود في الفضاء الإقليدي لأيّ سطح يمثل إجمالياً مستوي لوباتشفسكي[13]. إنّ هذا التعارض بين المحلّي وبين الإجمالي من وجهة نظر الأشكال الفضائية وتحويلاتها هامّ، وسنعود إليه في بداية الفصل الثالث.

3 ـ أشكال الفضائية واللامتغايرات وفق زمر من التحويلات

3.1 ـ هكذا، سمح اكتشاف هندسات غير إقليدية بتصوّر منظومات من الأشكال تختلف عن المنظومة التي تقدّمها الهندسة الإقليدية. في مثل هذه المنظومات، المماثلة في بنيتها المنطقية

(12) سطح دوراني هاجرته هي المنحني المسمّى مساوي المماسّات، حيث جميع أجزاء المماس الواقعة بين المنحني ومستقيم محدد تكون متساوية. في نموذج بوانكاريه، تتحدّد المتريّة إذاً من خلال المسافة بين «نقطتين» محددة على أنها لوغاريتم النسبة المتصالبة لهاتين النقطتين وتقاطعات «المستقيم» (النصف دائرة) الذي يوصلهما بمستقيم القاعدة.

(13) انظر: Nikola Efimov, *Géométrie supérieure = Vyschaia geometriia*, [traduit du russe par E. Makho] (Moscou: Editions Mir, 1981), p. 258.

للمنظومة الإقليدية، توجد رسوم سَمِيَّة الرّسوم الإقليدية، هي مواضيع هندسية جديدة، تختلف عرضيّاً في تكوينها عن المواضيع الإقليدية وفق الحدس الإدراكي، لكن خصائصها يمكن أن تتقابل مع الخصائص الإقليدية، وهي بطريقة ما نقل لها. هذه القرابة، مؤشّر فضائية بمعناها الأعم، هي التي توحي بأن نأخذ في الاعتبار معنى هذه التعددية في المنظومات ونفسّره.

أبـرَزَ عـالِـمـا هـنـدسـة، أحـدهـمـا الإنـجـلـيـزي آرثـر كـايـلاي[14] (1821 ـ 1894)، والآخر الألماني فليكس كلين[15] (1849 ـ 1925) المتصوّر الأساسي الذي يسمح، عند تطبيقه على المظاهر الهندسية، بتجديد منظومتها كفضاء أو هندسة. أنه مفهوم الزمرة، الذي طوّره أفاريست غالوا (1811 ـ 1832) في نصّ نُشر بعد وفاته، كأداة لدرس قابلية حلّ المعادلات، وعرّفه كموضوع رياضي مبتكر كل من أوغستين لويس كوشي (1789 ـ 1857) وكميل جوردان (1838 ـ 1921) في شكل تعويضات، أي تبديلات لعدد منته من المواضيع .إنّ زمرة تحويلات الرّسوم في هندسة ما هي منظومة من العمليّات إذا ما كرّر تطبيقها كانت نتيجته أيضاً رسماً في تلك الهندسة وكان ذلك التطبيق تجميعيّاً. ويجب أيضاً أن تكون المطابقة هي إحدى هذه العمليّات، فتترك موضوعها بدون تغيير وأن يقترن بكل عمليّة عمليّة معاكسة وإذا تتالتا حصلت المطابقة، فنتعرّف على الطبيعة الجبرية البحتة لهذا

(14) بصورة خاصة في: «A Sixth Memoir on quantics», 1859, in: Arthur Cayley, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, 14 vols. (Cambridge [Eng.]: The University Press, 1889-1898), pp. 561-606.

(15) Programme d'erlangen, 1872, Félix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, préf. de Jean Dieudonné; postf. de François Russo (Sceaux: Ed. J. Gabay, 1991). Le Titre original de la dissertation est: «vergleichende Betrachturgen über neuere geometrischen Fershungen,» leçon inaugurale de la chaire d'erlangen.

المتصوّر، المعيّن فقط من خلال خصائصه العمليّاتيّة الصورية : أي التجميعيّة، ووجود عملية محايدة وعمليات عكسيّة، من دون تدخّل طبيعة المواضيع المعمول عليها. غير أن استقرار بعض خصائص الرّسوم تحت تحويلات زمرة معيّنة هي التي سيقترحها ف. كلين كتمييز لها من حيث انتماؤها إلى نفس المنظومة من الأشكال. وستعرّف مثل هذه الزمرة، المنعوتة بالرئيسية، الخصائص الهندسية لمظاهر فضاء «من خلال لاتغيّرها بالنسبة إلى تحويلات هذه الزمرة الرئيسية»[16]. بيد أن الفكرة الخلاّقة تأتّت بالتأمّل في التحويلات الإسقاطية. منذ بداية برنامجه، لفت كلين النظر فعلاً إلى أن الرّسوم المحوّلة بالإسقاطية لا تحافظ أبداً في الحالة العامّة على خصائصها المتريّة؛ فهذه الأخيرة لا تنتمي ذاتياً إذاً إلى مواضيع هندسة كهذه، إلى رسوم فضاء إسقاطي، فهذه المواضيع يجب أن تعرّف كحاملات للخصائص الوحيدة اللامتغيّرة بزمر التحويلات الإسقاطية:

«لم تولد الهندسة الإسقاطية إلا بعد أن أصبح من المألوف اعتبار الرّسم الأصلي وجميع الرّسوم المستنبطة منه بالإسقاط متطابقة، وبعد أن سيقت الخصائص الإسقاطية بصورة تبرز استقلالها عن التغييرات التي يحملها الإسقاط. معنى ذلك اتّخاذ زمرة التحويلات الإسقاطية أساساً للتأمّلات في هذا الشأن. . .»[17].

من الواضح أن إزاحات الرّسوم في الفضاء الإقليدي تشكّل أيضاً زمرة تحافظ عندئذ على المسافات المتبادلة بين النقاط،

---

(16) سوفيوس لي (Sophus Lie) سوف يطوّر الفكرة نفسها مطبّقاً إياها على التحويلات اللامتناهية في الصّغر للرسوم المتوافقة مع مفهوم انتقالات الأشياء الصلبة: Sophus Lie, *Theorie der transformationsgruppen*, 3 vols. (Leipzig: B. G. Teubner, 1888-1893). سنعاود الحديث عنها في الفصل الثامن. انظر: Klein, Ibid., p. 7.

(17) انظر الفقرة 3، ص 10 من: Klein, Ibid.

كخصائص أساسية مميّزة. وهكذا، يمكن اعتبار رسمين يتراكبان نفس الرّسم مزاحاً في ذلك الفضاء.

3.2 ـ على أنّ مفهوم اللاتغيّر تحت تأثير زمرة من التحويلات يتضمّن معنيين التمييز بينهما أساسي، فمن ناحية تتميّز الأشكال في فضاء معّين بزمرته الأساسية بعدم تغيّر بعض الخصائص المعتمدة على أنها خصائصه الهندسية. ومن ناحية أخرى، إذا ما تغيّرت الأشكال نفسها طبيعياً بفعل عمليات الزمرة فمن الجائز أن يبقى بعضها في ذلك الفضاء كما هي من دون تغيير مهما كان التحويل المنتمي إلى تلك الزمرة فالتحويلات نفسها تشكّل إذاً زمرة التشاكل التقابلي الدّاخلي لتلك الأشكال المميّزة الموصوفة عندئذ بالأشكال المطلقة في الفضاء الذي تنتمي إليه.

يؤسّس التصوّر الأوّل عن اللاتغيّر طبعاً وظيفة زمرة التحويلات نفسها نظير تحديد هندسة من خلال تمييز رسومها. وبطريقة أكثر دقّة، نطلق اسم لامتغيّرة أساسية لمثل تلك الزمرة بالنسبة إلى تشكّل من n نقطة، على دالّة عددية تأخذ نفس القيمة بخصوص جميع محوّلات التشكّل المذكور. لقد رأينا في الهندسة الإسقاطية أنه، ما أن يتمّ تبنّي نمط تعليم النقاط من خلال الإحداثيات المتجانسة، حتى نستطيع أن نحدّد بخصوص كل تشكّل من أربع نقاط متراصفة على نفس المستقيم، نسبة متصالبة تظل ثابتة تحت كل تحويل إسقاطي. ونبيّن أن من الجائز إرجاع لامتغيّر تشكّل يفوق عدد نقاطه 4، إلى دالة من مثل تلك النّسب. ونبيّن أيضاً ألاّ وجود لأيّ لامتغيرة بخصوص تشكّل من أربع نقاط ليست متراصفة على مستقيم، أو أقلّ من خمس نقاط غير محدّدة : كل تشكّل من هذا الطراز يمكن أن يتحوّل فعلاً إلى أي تشكّل آخر من الطراز نفسه. ومن هنا نرى المعنى الواجب إعطاؤه إلى اللامتغيّرات نظير خاصّية تحدّد هندسياً فصيلة من رسوم فضاء ما، رسوم تعتبر من وجهة النظر هذه متطابقة.

وفي حالة الهندسة الإقليدية يربط اللامتغيّر بالتشكّلات القائمة من نقطتين وهو المسافة بينهما.

إذا نظرنا بصفة عامّة مع كلين إلى هندسةٍ كتعدّد ذي n بعد من نقاط، كل نقطة منها معلّمة ب n أمثال من الأعداد، وملحق بزمرة (رئيسية) من التحويلات، فإنّ من الطبيعيّ التساؤل عن مصير ما تشكّله تلك النقاط من رسوم عند حصر تلك الزمرة أو توسيعها، فبتوسيعها (لتشمل المزيد من التحويلات) «لا ينحفظ إلا جزء من الخصائص الهندسية لتلك الرسوم». وبحصرها، تنحفظ خصائص جديدة لكن بفعل جزء فقط من التحويلات السابقة، فنحن إذاً أمام مبدأ ترتيب لمنظومات أشكال بواسطة احتواء لزمرها الرئيسيّة. في انطلاقنا من الزمرة الإسقاطية (في تعدّد ذي بعدين على سبيل المثال)، فإن الزمرة الجزئية التي تحافظ على النسبة التوافقيّة لثلاث نقاط متراصفة[18]، تُعيِّن في المستوى، هندسة تآلفية. ولامتغاير تشكّل من ثلاث نقاط غير محدّدة، في زمرة جزئيّة من الزمرة التآلفية، هي الزمرة الجزئية أحادية المقياس، هو قياس مساحة المثلث القائم على تلك النقاط الثلاث[19] وأخيراً للزمرة الجزئية المتعامدة في الزمرة التآلفية أحادية المقياس، لامتغيّر أساسي مرتبط بالتشكلات من نقطتين هو دالة المسافة $\sqrt{(x_1^2-x_2^2)\ \ +(y_1^2-y_2^2)}$

وما هندسة الزمرة المتعامدة هذه سوى الهندسة الإقليدية المألوفة بمتريّتها[20]، فكل شكل في الهندسة الإسقاطية هو إذاً

(18) نأخذ في الاعتبار الإحداثيات العادية $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ لثلاث نقاط على مستقيم، النسبة التوافقية هي الدالّة السلميّة (العدديّة) $\frac{x2-x1}{x3-x2}=\frac{y2-y1}{y3-y2}$. التوازي محافظ عليه إذاً.

(19) نأخذ في الاعتبار 1/2 من القيمة المطلقة للمحدِّد: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

(20) إذا أعطينا تمثيلاً جبرياً للزمر الثلاث المأخوذة بالاعتبار، بتخصيص النقاط =

موضوع في الهندسات التابعة؛ لكن كل واحدة من الهندسات التابعة تتضمّن أشكالاً لا تنتمي خصائصها إلى هندسات أعلى رتبة. وكلما كانت الزمرة أوسع، كلما كان فضاء الكائنات التي تعرّف بها تلك الزمرة هندسيّا كذاتِ معنى، أفقر.

3.3 ـ هذا هو المعنى الأول للاتغيّر كمُحدِّد (معيّن) لهندسة، أي بمنظومة مقفلة من الأشكال الفضائية. وفي معنى آخر، يسمح اللاتغيّر، الذي أشار إليه كلين، بعقلنة الهندسات من وجهة نظر أخرى، ويسمح بشكل خاصّ بتمييز مختلف الهندسات غير الإقليدية من خلال تحويلاتها، فنقارن إذاً الزمرة الرئيسية لهندسة ما بالزمرة الواسعة جداً المؤلّفة من التحويلات الإسقاطية. من وجهة النظر هذه، سبق أن أشرنا إلى أنّ الزمر التي تميّز الهندسة التآلفية والهندسة الإقليدية التي تظهر كاقتصارات في الزمرة الإسقاطية .والحال أن هذا الاقتصار يتحقّق إذا قمنا بتثبيت كائن خاصّ من بين كائنات الزمرة الأوسع : «محدَّد بشرط أنّ التحويلات الوحيدة التي يبقى تطبيقها على الفضاء من بين تحويلات الزّمرة المعنيّة قائماً ـ مع افتراض ذلك الكائن ثابتاً ـ هي تلك المتعلقة بالزّمرة [الجديدة] الرئيسية [المقتصرة]»[21].

هذا يعني أنّ داخل الزمرة الموسّعة، قد انتقيت، التحويلات التي هي تشاكلات تقابلية داخلية لشكل مثلث أخذ «كمطلق» انتقيت

= بإحداثيات إسقاطية، نصوغ التحويلات الإسقاطية، في المستوى على سبيل المثال، في إحداثيات متجانسة، بالعلاقات الخطّية: $\rho' x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ حيث $i, j = 1, 2, 3$ مع شرط الاعتكاسية $|a_{ij}| \neq o$. تحويلات الزمرة التآلفية المستوى على سبيل المثال، في الإحداثيات العادية تكتب: $x'_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j + a_{i3}$ مع الشرط نفسه: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

الزمرة التآلفية الوحيدة النموذج تتحدّد من خلال الشرط الإضافي $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1$، والزمرة المتعامدة تتحدّد من خلال الشرط بأن مصفوفتها يجب أن تكون عكس منقولتها.

(21) Klein, Ibid., p. 9.

لتكوّن الزمرة الجديدة بحيث إن الخصائص الجديدة اللامتغيّرة بالمعنى السابق تظهر بعدئذ، في الفضاء الموسّع كغير أصليّة لكن كمنتسبة إلى العنصر المطلق، اللامتغيّر في الفضاء الجديد. وهكذا يتعلّق الانتقال من الفضاء الإسقاطي المستوى إلى الفضاء التآلفي بتحديد مستقيم إسقاطي اعتباطيّاً على أنه لامتغيّر «هو المستقيم في اللانهاية».

وعندئذ تبقى خاصّية توازي المستقيمات كتقاطع على المستقيم في اللانهاية منحفظة في الزمرة الجديدة. ويفترض الانتقال إلى فضاء إقليدي أن يكون الشكل المعروف بالدائرة التخيّليّة في اللانهاية[22] لا متغيّراً.

«وهو عنصر لا يتمتّع بخاصّية التحول إلى ذاته إلا من خلال التحويلات في الزمرة الإسقاطية التي هي أيضاً تحويلات في الزمرة الرئيسية [الإقليدية: الزمرة المتعامدة][23]».

وتنحفظ الخصائص المتريّة الإقليدية، وكذلك قيم الزوايا، وتبرز عندئذ في الفضاء الإسقاطي كعالقة بتثبيت ذلك المطلق وقد أصبحت ذاتيّة في الفضاء الجديد.

وهكذا نجد أن التركيب التراتبي للهندسات، المتكافئة مع تركيب تراتبي بالاحتواء لزمر التحويلات يقترن بتثبيت بعض مواضيع توصف بأنها مطلقة، وهذا ما يؤكد الازدواجية العميقة للعمليّات وللمواضيع الرياضيّة وتعمّم تحويلات الزّمرة فكرة العمليّاتية للإزاحة الإقليدية، الفكرة القائمة على تطابق شكلين، فتثبيت شكل مطلق

---

(22) في الفضاء وفي المستوى، المظهر المشكّل من نقطتين دوريّتين على مستقيم اللانهاية؛ في الإحداثيات المتجانسة: $x_1^2 + x_2^2 = 0, x_3 = 0.$

(23) المصدر نفسه، ص 11.

يبرز بطريقة ما وجهة النظر الازدواجية: أي تطبيق الفضاء بذاته مع الإبقاء على موضوع مثبّت.

3.4 ـ لهذه النظرية حول اللامتغيّرات المطلقة دلالة هامّة عند تطبيقها على الهندسات غير الإقليدية، فعندئذ تصنّف الهندسات إذاً كاقتصارات للهندسة الإسقاطيّة وفق ما يكون مطلقها مخروطاً من نوع معيّن منحنياً يقبل التعريف في الفضاء الإسقاطي، في حال كانت الزمرة الرئيسية للهندسة المطلوب تحديدها هي زمرة التشاكلات التقابلية الدّاخليّة لذلك المخروط. سبق أن أشرنا منذ حين إلى أن للهندسة الإقليدية ثلاثية الأبعاد زمرة رئيسية هي زمرة التشاكلات التّقابليّة الدّاخليّة للدائرة التخيليّة في المستوى في اللانهاية، المخروط المنحلّ من دون نقاط حقيقية. ونبيّن أن مطلق هندسة لوباتشفسكي هو مخروط حقيقي من نوع «بيضاوي»[24]، معادلته المتجانسة هي: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. إذا أخذنا في الاعتبار منحنياً كهذا مرسوماً في المستوى الإقليدي، فإنّ نقاطه الداخلية تكون صور نقاط مستوى القطع الزائد، وأوتاره الداخلية صور مستقيمات لوباتشفسكي. لدينا من وجهة النظر هذه نموذج لهندسة القطع الزائد في المستوى الإقليدي، فهناك عدد لانهائي من الأوتار المنبثقة من نقطة داخلية للمنحني لا تتقاطع مع وتر داخلي آخر. أما هندسة ريمان الإهليلجية فهي تلك التي يكون مطلقها المخروط غير المنحلّ في المستوى الإسقاطي المسمّى «المخروط الصفر» والذي ليس له سوى نقاط تخيليّة: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

(24) أي منحنى مغلق على مسافة منتهية، بالتعارض مع المخروطيات من نمط القطع الزائد أو القطع المكافئ أو المستقيمات التي هي، في الفضاء الإسقاطي، مغلقة في اللانهاية. الشكل البيضاوي يقسم المستوى الإسقاطي إلى قسمين.

3.5 ـ إذاً أمكن شرح فكرة الهندسات المتمايزة كمنظومات من أشكال فضائية، ـ فكرة قائمة على مفارقة وجود هندسات غير إقليدية، من خلال مفهوم زمر التحويلات، المستوحى من تطوّر الهندسة الإسقاطية. لكن هذا التوسّع العقلاني لمتصوّر الشكل الهندسي حصل، كما نرى، على حساب انحلال، أو على الأقل تحييد، المميزات التكوينية الحدسية، فالمخروط الإسقاطي يمكن رؤيته كزوج من خطّين مستقيمين، متمايزين أو متطابقين، أو مجموعة من نقاط تخيليّة، أو «بيضاوي»؛ ولكن، على حالته تلك، لن نميّزه إطلاقاً كدائرة، أو قطع ناقص (أهليلج) أو قطع مكافئ أو قطع زائد. وبالإضافة إلى ذلك، سوف نستطيع بناء نماذج متشاكلة تقابلياً من مثل تلك الهندسات في فضاء إقليدي كما رأينا تمثل فيه مستقيمات هذه الهندسة بمستويات والنقاط بمستقيمات (نماذج ازدواجية)، أو أيضاً المستقيمات» كأنصاف دوائر أو قطع مستقيمات متعامدة مع مستقيم إقليدي مثبّت (نماذج من خلال «تعديلات هندسية»).

وهكذا، يصبح متصوّر الشكل موضوعاً فضائيّاً مجرّداً مرتبطاً بمنظومة عمليّات، تشكّل بدورها موضوعاً رياضياً من المستوى الثاني: هو زمرة تحويلات، لكن مفهوم الشكل الهندسي أمكن إعادة بنائه أيضاً تحت وجه آخر، بالارتباط بمنظومات أخرى عملياتيّة. وسيكون ذلك مبحث الفصل القادم.

الفصل الثالث

الأشكال والتوليفات

قدّمنا الانتقال من الأشكال إلى منظومات أشكال من خلال لعبة التحويلات. والآن سنعرض تصوريّة للأشكال من جانب آخر، بموجبه توصّف كتوليفات من نقاط. وسنرى عندئذ أن هذه البناءات التوليفية تفسح المجال، أكثر مما تفعل التحويلات، أمام صياغة الخصائص الفضائية من خلال جبر، أي من خلال نظريّة عمليات مجرّدة بحيث سيكون المبحث المركزي في هذا الفصل تأمّلاً في الفضائي كما تقدّمه الطوبولوجيا الجبرية المسمّاة أيضاً التوليفية.

1 ـ الأشكال المحلية والأشكال الإجمالية

1.1 ـ بخصوص النماذج الإقليدية لمختلف الهندسات، سبق أن صادفنا التعارض بين الفضائية المحلية والفضائية الإجمالية. يشدّد فليكس كلين على هذا التباين:

«إن الامتداد المحلي لمتريّة معيّنة لا يتحدّد بصورة أحادية التقابل، على عكس مسألة الامتداد التحليلي»[1].

---

(1) نعلم في التحليل فعلاً أن دالّة تحليلية متغيّرها مركّب ودائرة تقارب متسلسلتها معروفة في نقطة تكون فيها معرّفة، يمكن تمديدها شيئاً فشيئاً بواسطة متسلسلات متقاربة، دوائر متقاطعة، على دروب ملائمة مختارة. Felix Klein, *Gesammelte mathematische* =

إذاً يمكن أن يبرز فضاء محدّد بفصيلة معيّنة من الرّسوم المحلية أشكالاً إجمالية متنوّعة جداً يعيّنها كلين كأشكال فضائية، وهو متصوّر يختلف بالتالي عن متصوّر الأشكال أو الرّسوم (المظاهر) الفضائية[2]. على أنّ المحلّي في صياغة كلين، يتعلّق بصفة أخصّ بمتريّة، وهذا جانب من الفضائية سنقوم بدراسته من حيث التّعليم (الرّصد) والقياس. بالفعل يتساءل كلين في المقطع المذكور[3] عن الأشكال الإجمالية التي تحافظ على تحديدات متريّة معرّفة محليّاً، فما نتمسّك به من الإجمالي هنا هو إذاً خاصّية تحافظ على متريّة الفضاء من دون أن تكون هي متريّة لذاتها. ولكنّه أبان فكرته، فجعلنا نرى أن هذا التحديد الإجمالي للفضاء يتعلّق بما نسمّيه اليوم طوبولوجيا، وما كان يسمّى في الأمس القريب تحليل مواضع. ولنكتف مرّة أخرى بتمييزه على نحو غير واضح كغير متري قبل أن نتبيّن أنه، من وجهة نظر الفصل السابق، يقترن بزمرة جديدة من التحويلات والثنائية الاستمرارية، هي التشاكلات المتّصلة أي التشاوهات الخالية من التمزّق والتعاكسات.

حاليّاً، سنكتفي بتوضيح مفهوم الشكل الإجمالي لفضاء، مذكّرين بتمثيل تخطيطي تقليدي لبعض أشكال فضائية خاصّة، يحافظ على متريّة ذات تقوّس ثابت[4]، فالمقصود إذاً فضاءات ثنائية البعد

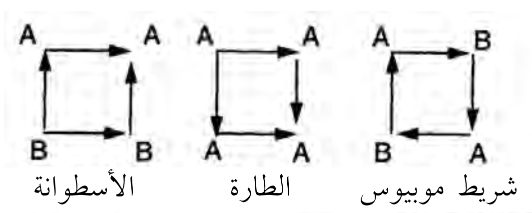
Abhandlungen, 3 vols. (Berlin: J. Springer, 1921-1923), pp. 254-255, and = *Vorlesungen über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*, p. 254.

(2) من ناحيتي أستعمل مصطلح «أشكال فضائية» بمعنى أعم يشمل المحلي والإجمالي، بتعارضه مع «الرّسوم» أو «الأشكال» الفضائية.

(3) المصدر نفسه، ص 295.

(4) باستباقنا فصلاً قادماً لنذكر أن المتريّة تعرّف من خلال شكل تفاضلي $\Sigma g_{ij}dx^i dx^j$ = ds^2 بقياسه المسارات اللامتناهية في الصغر، وأن تقوّس غاوس في نقطة هو عدد يتغيّر إجمالاً على سطح أو بصورة أعم على متنوّعة تكوّن الفضاء المأخوذ في الاعتبار. على أنّ هذا العدد هو لامتغيّر طوبولوجي في ما يتعلّق بعدم تأثّره بتشويه من دون توسيع أو قطع.

(حدسيّاً سطوح) تتمثّل على مسطّح بخليّة تحدّها نقاط، متمايزة أو متماهية في الفضاء، وبمسالك موجّهة يمكن أن توصل بينها على السطح. لندرج الأسطوانة والطارة وشريط موبيوس كأمثلة سهلة:



للأسطوانة كما للمسطّح تقوّس يساوي صفراً على الدوام، على غرار شريط موبيوس؛ لكن لهذا الأخير نقطة حرجة سببها الفتل. وللطارة تقوّس موجب ثابت.

رسم 1

بخصوص مفهوم شكل الفضائية الإجمالي هذا نودّ أن نبرز ثلاث وجهات نظر تبرّر تقسيمنا الثلاثي لمجمل هذا المؤلّف.

بالفعل يمكن أن ننظر إلى الرّسوم الفضائية من حيث إنّها لا تتأثّر بالتغييرات الخالية من التمزّقات، والتوسّعات من دون نكوسات. إنّ التحويلات الضامنة لهذه الشروط ـ التشاكلات الطوبولوجية ـ التي تنطبق على الأشكال الإجمالية وعلى الأشكال المحلية سواء بسواء، هي مع ذلك موضوع نظريّة محليّة لمجموعات من النقاط، منظور فيها وفق الترتيب ووفق الجوار. وهذا ما سنتفحّصه تحت عنوان: تركيبة فضاء.

نستطيع أن نأخذ في الاعتبار أيضاً الرّبط خطوة خطوة بين قطع من الفضاء مزوّدة ببناها، معتلمة بواسطة إحداثيات محلّية عائدة إلى «خرائط» موضوعة، في البنية الأساسية «للنموذج الفضائي» لمجموعات من نقاط R^n كما سنرى، فالمتصوّرات التي تظهر عندئذ هي متصوّرات «المتنوّعة» والمتريّة، التي سندخلها في الفصل الثامن تحت عنوان: اعتلام وقياس.

وفي النهاية، هناك فكرة أخرى هي تغطية فضاء بشبكة من الرّسوم الأولية (مثلّثات) معرّفة بواسطة «الرؤوس» و«الوجوه» المكوّنة لها، بهدف تقديم نظريّة حول الخصائص الإجمالية لأشكال فضائية. إنها كامنة خلف تمثيلات الأسطوانة والطارة وحلقة موبيوس التي قمنا بتقديمها. وجهة النظر هذه تبدو لي جديرة بأن ننهي بها القسم الأول حول الأشكال بصورة عامّة. لكنها تتفتح على متصوّر المتنوّعة في كونها بنية متجانسة لفضاء بعديّته، فتكون على المدى البعيد مناسبة أيضاً لتقديم آخر جزء من هذا المؤلف.

1.2 ـ إنّ متصوّر الهرمية المنتظمة هو الذي سنتخذه موضوعاً بهدف فهم أفضل لمعنى الشكل الإجمالي للفضائية، معرّفاً من خلال «التثليث»، أي من خلال كوكبة من نقاط، موصولة ثلاثاً ثلاثاً، هي رؤوسها. نعلم أنّ الهرميّات الخمس المنتظمة كانت معروفة منذ الزمن الأفلاطوني من قبل ثياتيتوس. وفي ما يتعلّق بالمكعّب ورباعيّ السطوح واثني عشريّها فقد تكون معروفة قبل ذلك لدى الفيثاغوريين. واعتبرت حينئذ كرسوم خاصّة في الفضاء ثلاثيّ الأبعاد، لكن أهمّيتها من حيث فكرة الفضاء، فهي في ما نستطيع أن نراه فيها اليوم من أشكال فضائية ذات بعدين أيضاً، فسطوح متعدّدات الوجوه الخمسة تتشاكل شبهيّاً مع سطح الكرة، بحيث تظهر خصائص هذه الطوبولوجية الإجمالية من خلال الخصائص التوليفية (التوافقية) لرؤوس الأولى وحروفها ووجوهها، غير أن متصوّر التشاكل الشبهي المدرج هنا يعود في الأصل إلى نظرة محليّة على الفضائية، يمكن تعريفها أوّلاً من خلال تعبير مجموعاتي. بحيث إن «اعتبار متنوّعة [وحدسياً السطح خاصّة] مثلما ينبّه إليه ألكساندروف في كتابه(5). كفضاء طوبولوجي

(5) Pavel Sergeevich Aleksandrov, *Elementary Concepts of Topology* ([n. p.: n. pb.], 1922), p. 12.

بُعده n متشاكل شبهياً مع متعدد وجوه مترابط ولنقاطها جوارات متشاكلة شبهيّاً مع كرات بعدها n»، هو «حلّ وسط لا يمكن في الوقت الحالي القول بأنّه انصهار عضوي» لاتّجاهين تشير إليهما وجهة النظر المجموعاتيّة ووجهة النظر التوليفية في الطوبولوجيا[6]. لكن التمييز بين تعريفَيْ شكل الفضائية كمتنوّعة وكمتعدّد وجوه لقي أحقيّته عندما سمح تطوّر الطوبولوجيا الجبريّة بإعطاء معنى «توليفي» للتشاكل الشبهيّ المجموعاتي بين مظهرين رسمين.

لنتفحّص عن قرب إذاً متصوّر الهرميّة المنتظمة في الفضاء ثلاثي الأبعاد. الهرميّة هي منظومة تتألّف من مضلّعات تنتظم بحيث إن كل اثنين منها واثنين فقط يشتركان في ضلع. تكون الهرميّة منتظمة منتظماً إذا كانت جميع وجوهها مضلعات منتظمة متماثلة. لنلاحظ قبل كل شيء أن هذه المواضيع تتجاوب مع الفكرة التي طرحناها حول مواضيع رياضيّة «طبيعيّة»، فهي تقدّم بالفعل حصيلة غنيّة من خصائص، هي ـ من مختلف وجهات النظر، جوهريّة بالنسبة لها، خصائص طوبولوجيّة ـ تهمّنا هنا ـ وعرضياً متريّة، من زوايا ومن أطوال. بمعنى من المعاني، أكملت هذه الحصيلة، أي إن هذه المتصورات لا يمكن إغناؤها بخصائص جديدة غير تجريبيّة. إنها، وفق عبارة جريئة من قبلنا «نماذج ذواتها»[7]. إنّ هذا النعت «بالطبيعي»، مطبّقاً على الهرميات المنتظمة، مبرّرٌ أيضاً من حيث إنّه

(6) المصدر نفسه، ص 12.

(7) بالمعنى المزدوج لتمثيل أكثر ملاءمة وتحقيق أكثر واقعيّة. إذا فصلنا عن الموضوع «الطبيعي» بعضاً من خصائصه فَقَدَ ذاته؛ ولا يمكن أن نضيف إليه خصائص تتميّز جوهرياً عن خصائصه. «حول فكرة المتصوّر الرياضي الطبيعي»، انظر: Gilles-Gaston Granger, *Formes, opérations, objets*, mathésis; ISSN 1147-4920 (Paris: J. Vrin, 1994), p. 162.

لا يوجد منها في الفضاء ثلاثي الأبعاد إلا خمسة أشكال، هي أنواع طبيعية على نحوٍ ما، هي الهرم المثلّث، والمكعّب، والهرم الثماني والهرم الاثنا عشري، والعشرينيّ والهرجعة الاثنا عشري والعشرينية.

كان ثياتيتوس يعرّف تفرّد متعدّدات السطوح هذا. ونفسّره بادئ ذي بدء حدسيّاً كقسر غريب مفروض على أشكال فضائية من بُعدين تتكافأ طوبولوجياً مع الكرة[8]، كمتنوّعة ثنائيّة البعد مغطّسة في الفضاء ثلاثي الأبعاد. لقد برهن أولير[9] على وحدانيّة هذه الهرميّات بارتكازه على علاقة بين عدد الرؤوس S وعدد الحروف A وعدد الوجوه F، في سطحها الكلّي، والتي يمكن أن يكون قد عرفها ضمنياً ديكارت: $S\text{-}A+F = 2$[10] ويمكن الحصول أيضاً على برهنة غير نموذجية باعتماد خصائص زاويّة، وإذاً متريّة، فوجوه متعدّد السطوح المنتظم لا يمكن أن تكون فعلياً إلا مثلّثات أو مربّعات أو خماسيّات أضلاع، لأن ثلاثة وجوه على الأقل تلتقي في كلّ رأس، ولأنّ مجموع زوايا

---

(8) معرّفة لا على نحو متري من خلال القياس الثابت لشعاعها، بل كسطح ذي جانبين مغلق ترابطه 1 (أي إن كل منحنى مغلق مرسوم على سطح الكرة يقسمه إلى قسمين منفصلين). لكننا نستطيع أن نعمم على فضاء من بعديّة m متصور متعدّد السطوح المنتظم والكرة من الرتبة n، كأشكال فضائية من بُعدها (n-1) في فضاء من الرتبة n.

(9) Dans Les commentaires de Saint-Petersbourg, 1752-1753, parus en 1956, in: *Euler Opera* XXV.

(10) برهان ديكارت: «De solidorum elementis,» in: René Descartes, *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (Paris: J. Vrin, 1964-), X, pp. 265-269.

لعدد الهرميّات الخمس يستعمل الخاصة الآتية: يجب أن تكون النسبة $\frac{2S-4}{F}$ والنسبة $\frac{2F-4}{S}$ أعداداً صحيحة؛ وبالنتيجة القيم الوحيدة للكمية S (وللكمية F) هي 20 ,12 ,8 ,6 ,4. في النص نفسه، يقول ديكارت إن عدد الزوايا المسطّحة في الهرميات منتظم (الذي يساوي ضعفي عدد الحروف A) يساوي $2F+2S-4$. ومنه تستنتج علاقة أولير $F+S-A=2$ التي لا يصوغها ديكارت برغم ذلك.

هذه الوجوه لا يمكن أن يزيد عن 360 درجة، فالوجوه الوحيدة الممكنة إذاً هي المثلّثية ($60^o x3 < 360^o$)، والمربّعية ($90^o x4 = 360^o$)، والخماسيّة ($108^o x3 < 360^o$). هذا هو قوام قاعدة برهان أقليدس[11].

لكن البرهنة على خاصّية طوبولوجية يجب ألاّ تأخذ في الاعتبار إلاّ خصائص غير متريّة. وفي هذه الحال تكون العلاقة المذكورة آنفا المسمّاة علاقة أولير ـ بوانكاريه بين S, A, F، التوليفية حقّاً، عصب الإثبات. ويمكن الاستدلال على العلاقة نفسها بتسطيح الهرميّة، أي بحذف أحد وجوهها، فنحصل عندئذ على شبكة مسطّحة لها نفس عدد الأضلاع والرؤوس الموجودة في الهرميّة. وبحذف أو إضافة وجه وضلع عدّة مرّات، يمكن عندئذ اختزال تلك الشبكة في مثلّث وحيد، من دون أن يتغيّر العدد (S-A+F). والحال أنّ قيمة هذا العدد تساوي 1؛ وبالنسبة للهرميّة التي تحمل وجهاً زائداً ونفس عدد الرؤوس والحروف في الشبكة، فإنّ العدد (S-A+F) يساوي إذاً 2[12]. وهكذا نكون قد بيّنا أنّ (F-A+S=2) بالنسبة لكل هرمية منتظمة محاطة بكرة، والبرهان يصلح أيضاً في حال عدم انتظام الهرميّة متريّاً بل انتظامها طوبولوجياً فقط، أي إن لوجوهها نفس عدد الأضلاع (مستقيمة أو منحنية) وتتقاطع رؤوسها مع نفس العدد من الوجوه. وهكذا تكون خاصّية طوبولوجية لشكل فضائية ـ هرمية، أو كرة بصورة جوهريّة أكثر ـ مميزة بعلاقة جبريّة وعدد. ونبيّن أن هذا العدد يختلف فعلاً بخصوص أشكال أخرى للفضائية مختلفة طوبولوجياً، وأنه يتعلق بالترابطيّة h (وهي نفسها عدد)[13]. من خلال

---

(11) Euclide, *Les Eléments* (Paris: Presses universitaires de France, 1990-), propos 18.

(12) الشروط الدقيقة لصلاحية هذا البرهان لم تطرح إلا من قبل فون ستوتد في العام 1847.

العلاقة (S-A + F = 3-h). وقد عمم بوانكاريه هذا المتصوّر لثابت أولير على المتنوّعات ذات البعديّة n، وشرح معناه رابطاً إياه بمنهجة كاملة من وجهة نظر طوبولوجيا جبريّة، أو توليفيّة.

الأشكال الأوليّة للطوبولوجيا الجبريّة

2.1 ـ منذ الآن سننظر إلى قطع من الفضاء كأشكال تدعى مباسط تحدّدها بصورة كاملة منظومات متناهية من النقاط. المبسط من رتبة صفر هو نقطة، المبسط من رتبة 1 هو مجموعة النقاط التي تؤلّف مقطعاً مستقيماً، بالمعنى التآلفي، واقعة بين نقطتين، هما حافّتاه. المبسط من رتبة n، أو المبسط ذو البعد n هو مجموعة من النقاط تحدّده منظومة من نقاط عددها متعدّد سطوح (n + 1) مستقلّة خطّياً، أي لا تنتمي إلى نفس فضاء جزئي تآلفي بعده (n-1)، فعلى سبيل المثال، المبسط من رتبة 2 تحدّده (وتعرّفه) ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم. ويعرّف المبسط من رتبة 3 بأربع نقاط لا تقع في مسطّح. والمباسط من رتبة p المنتمية إلى مبسط من رتبة n مع $p \leqslant n$، تسمّى بالمعنى الأعم، «الوجوه». وعلى نحو أشمل، سوف ننظر كأشكال إلى معقّدات مبسطيّة، هي مجموعات مؤلفة من عدد منته من المباسط المنفصلة أو التي لا تتشارك اثنين اثنين في كلّ وجوهها. وعندئذ نشير إلى المعقد K كمجموع للمباسط من جميع الأبعاد التي تشكّله، مضروبة بأعدادها؛ وبُعد المعقّد هو أكبر بُعد في أبعاد مباسطه. ومتعدّدات السطوح التي تمّ إدخالها سابقاً من وجهة نظر حدسيّة هي قطع من سطح يغطّيها معقّد من رتبة 2. هذا المعقد

---

(13) يكون ترابط السطح h إذا كان هناك h-1 منحنى على أكثر تقدير ترسم على السطح ولا تقطعه إلى جزءين منفصلين. لقد رأينا ان الكرة هي من ترابط 1. بالنسبة h = 3، فلدينا S - A + F = 3-3 = 0.

المؤلّف في نهاية المطاف من مباسط من الرتبة 2 «مثلّثية» هو «تثليث». غطاء كهذا هو الموضوع الرئيسي في طوبولوجية توليفية، فأي قطعة معيّنة من الفضاء ليست بالضرورة قابلة للتثليث، وعند حصول العكس فإنّ عدة تثليثات تكون ممكنة. لكن الخصائص المطلوبة في الطوبولوجيا الجبرية هي مستقلّة عن هذا التثليث أو ذاك للفضاء عينه. وإضافة إلى ذلك إنّ هذه الخصائص هي لامتغيّرة طوبولوجياً، بمعنى أنّ أي تحويل يقابل وجه مبسط بوجه في مبسط آخر له نفس البعد، سيبقيها محفوظة.

بهدف إدخال متصوّر الحافة لمعقّد ما وقد سبق إدخاله حدسيّاً بخصوص الحافّات، أو الأطراف أو «النقاط النهايات» (فابلان) في مبسط من رتبة 1، سنعرّف أولاً وجهة (أو توجّهاً)، ستكون ترتيباً اعتباطياً لعبور الرؤوس. بخصوص مبسط من رتبة 1 معرّف بالنقطتين A وB، نختار كموجب الترتيب AB أو الترتيب BA. بخصوص مبسط من رتبة 2 معرّف بالنقاط A, B, C نختار الترتيب (ABC) أو الترتيب (CBA) المميّزين في الحالة العامّة بالعدد الزوجي أو الفردي للتعاكس بين رأسين، فرؤوس مبسط من رتبة 2 يمكن إذاً أن يكون لها ترتيبان مختلفان ومتعارضان: الترتيب المختار اعتباطيّاً على كل مبسط من رتبة 1، أو ذلك المستقرأ من الترتيب المختار باستقلالية على أي مبسط من رتبة 2. توصف إذاً بنية معقّد k بواسطة مصفوفات الالتقاء، مع توضيح الانتماء والاتّجاه النسبي لجميع المباسط S^{m-1}، فإن لم يكن مبسط من رتبة n وجهاً لمبسط من رتبة n+1 كتبنا 0 في خانة المصفوفة؛ وخلاف ذلك، نكتب 1 أو 1 − تبعا لتطابق منحى الاتجاه في المبسط كمبسط من الرتبة n وكجزء من المبسط من الرتبة n+1 أو لا.

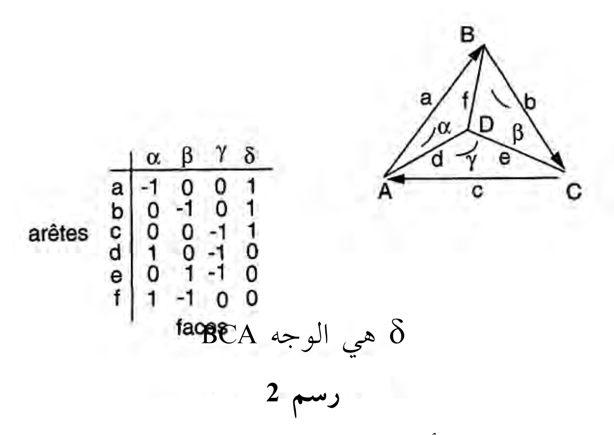
2.2 ـ لنأخذ المثال البسيط لتثليث رباعي السطوح، الذي هو

K^3، ولمصفوفات الالتقاء فيه بين الوجوه والحروف (الرسم 2).

سنعرّف حافة المبسط من الرتبة p كمجموع للمباسط من الرتبة (p-1) معدّلة بمعاملات تلاقيها ونسمي ذلك المجموع سلسلة من الرتبة p ونحصل على الحافّة من الرتبة 2 في الهرميّة الثلاثية كمجموع المباسط من الرتبة $\alpha+\beta+\gamma$: وعلى الحافّة من الرتبة 1 كمجموع حافّات جميع المباسط من رتبة 2 مع معاملات تلاقياتها.

$$(-a+d+f) + (-b+e-f) + (-c-d-e) + (a+b+c) = 0$$

وهي صفر؛ هذا هو مثال أول لمعنى هندسي لخاصية جبرية في خاصيّة جبريّة. صفريّةُ حافّةِ معقّدٍ يغطّي سطحاً مغلقاً جرى تثليثه تحدّده كسطح ثنائي الجانب قابلاً «للتوجيه»[14]، أيّاً كان تثليثه.



arêtes	α	β	γ	δ
a	-1	0	0	1
b	0	-1	0	1
c	0	0	-1	1
d	1	0	-1	0
e	0	1	-1	0
f	1	-1	0	0

faces

δ هي الوجه BCA

رسم 2

هذه المفاهيم الأساسية في الطوبولوجيا الجبرية يمكن ربطها الآن بمفاهيم محليّة في المجموعية، فعلى سبيل المثال، سنسمّي

(14) توجّه مختار على الدائرة (أو على مبسط من الرتبة 2) لا يتغيّر عندما ننقل هذا الرسم على مسطّح. يغيّر اتجاهه عندما ننقله على سطح وحيد الجانب، فنقول عندئذ إنه لا يقبل التوجّه، مثل شريط موبيوس.

«جواراً» للنقطة P في معقّد من الرتبة 2 كل مجموعة S من الرؤوس، والحروف والوجوه المشكّلة من نقاط المعقد بحيث إن أي مجموعة من نقاط المعقّد تكون P رأساً فيها، تتضمّن نقاطاً مباسط S.

2.3 ـ قبل أن نُدخل متصوّر التماثل، لنقدّم مثالاً شهيراً من طوبولوجيا التحليل التوليفي، تم حلّه حديثاً. نسأل عن العدد الأدنى الضروري من الألوان كي نلوّن سطحاً قسّم إلى خلايا، بحيث إن كل خليّة تشترك في حرف وحيد مع أي خليّة من الخلايا الملاصقة، وبحيث إن أي خليّتين متلاصقتين بهذا المعنى تختلفان في اللون. ومن المؤكّد أنه يلزم عدد من الألوان يكون على الأقل بمقدار أكثر مما يمكن أن يوجد من خلايا تلاصق خليّة ما: ونرى بسهولة أنه يوجد أربعة على المستوي الإقليدي أو الكرة؛ ونبرهن على أنه يوجد ستة على المستوي الإسقاطي، وسبعة على الطارة. في حالتي الطارة والمسطّح الإسقاطي، برهن على صحّة التخمين بأن هذا العدد من الألوان كاف. وبخصوص المستوي والكرة، لم يحدث ذلك إلا في العام 1976 حين توصّل كل من ك. آبل مع ف. هاكن إلى البرهنة على صحّة التخمين بكفاية الألوان الأربعة، برهنة شملت سبراً جدَّ معقّدٍ للحالات الواردة، حتّى أنّ السير به إلى النهاية لم يحصل إلاّ باعتماد برنامج حاسوب.

لنقتصر على رسم ملامحيّة للمحاولات الأولية، الناجحة بخصوص المسطّح الإسقاطي والطارة، من ترابط 2 وثلاثة، كمثال لطوبولوجية توليفية[15] (أو طوبولوجيا التحليل التّوافقي).

1 ـ بداية نختزل السطح المطلوب تلوينه إلى سطح هرميّة

---

(15) David Hilbertand and S. Cohn-Vóssen, *Geometry and the Imagination* = *Grundlagen der geometrie*, Translated by P. Nemenyi (New York: Chelsea Pub. Co., 1952), Chap. VI, pp. 336-340.

وجوهها هي الخلايا المطلوب تلوينها، فنبيّن حينئذ أن الخاصّية الحاسمة هي الترابط[16]، وأن هرميّتين من نفس الترابط تطرحان القضيّة ذاتها في التلوين، كما في المسطّح الإقليدي والكرة، من ترابط 1.

2 ـ بخصوص هرميّة ترابطها h، يلزم على الأكثر n لون، ومع استيفاء n للعلاقة $n>6\left(1+\frac{h-3}{F}\right)$، حيث F هو عدد الوجوه، وحيث h هو الترابط. والبرهان يستعمل صيغة أولير بوانكاريه: S-A + F = 3-h، وتغييرات في الهرمية لا تبدّل ترابطها h.

3 ـ ما هي الأعداد التي تستوفي العلاقة عندما يتغيّر الترابط؟

بخصوص h = 1 أو h = 2 تؤول الكميّة $6\left(1+\frac{h-3}{F}\right)$ نحو 6 وتبقى أقلّ من 6 عندما تتعاظم F. العدد 6 هو اذاً أصغر n مقبول كحدّ أعلى لعدد الألوان.

بخصوص h = 3 تساوي هذه الكمية 6 والعدد الأصغر المقبول n هو سبعة إذاً.

يمكن أن نبيّن حينئذ أنه بخصوص h = 2، حالة المسطّح الإسقاطي، وبخصوص h = 3، حالة الطارة، العدد 6 والعدد 7 هما فعليّاً العددان الأصغران للألوان الضرورية للتلوين.

4 ـ لكن البرهان نفسه مطبّقاً على الحالة h = 1 يعطي القيمة 6 كحدّ لأصغر عدد مقبول، الذي هو مختلف عن القيمة 4، العدد الأقصى للمناطق المتجاورة، فوجب إذاً إيجاد برهان جديد لإثبات صحّة الظنية 4، فنستعمل نظريّة البيانات، إنها بمعنى من المعاني صنوية نظريّة التفكيك إلى خلايا: الخلايا تمثّلها رؤوس البيان

(16) انظر: الفقرة 1.2، الهامش 8 من هذا الفصل.

الموصولة في ما بينها بقوس عندما يكون للخلايا ضلع مشترك. التلوين المطلوب من أربعة ألوان هو عندئذ دالّة مجموعة الرؤوس في المجموعة [1, 2, 3, 4] بحيث إن رأسين موصولين بقوس لن يكون لهما نفس الصورة. وتفحّص تشكّلات هذا البيان بالمعاينة البحتة هو الذي تعذّر إجراؤه إلا بواسطة برنامج حاسوبي[17].

3 ـ حساب التماثلات

3.1 ـ ستسمح الجبرنة المنهجية لمتصوّرات أشكال فضائية سبق إدخالها بحساب يرتكز على اقتران إحدى الزمر بشكل مبسطي. عندها تظهر أعداد مُحدّدة للخصائص الفضائية، على نحو ما سبق ورأينا في معرض الحالة الخاصّة بالهرميات؛ لكن هذه الأعداد ليس من وظيفتها تمثيل كمّيات، حتّى يضفي عليها معنى متريّاً؛ إنها مؤشّرات أو مؤثّرات تحدّد بنية زمرة. لنرسم ملامحيّاً تسلسل التعاريف التي تقود إلى المتصوّر الأساسي للتماثل وزمر التماثل.

1 ـ الموضوع الأصلي هو موضوع المعقد المبسطي في تثليثه لفضاء واشتماله مباسط α_i من بعديّة i.

2 ـ السلسلة من رتبة p هي مجموع مباسط من رتبة p متمايزة في معقد K تدون $u_1, u_2, \ldots u_{ap}$، حيث العناصر u هي أعداد صحيحة موجبة أو سلبية أو صفريّة. على سبيل المثال في الرسم 2 لدينا: $\alpha + \beta + 0\gamma + 0\delta$

---

(17) انظر: Kenneth Appel and Wolfgang Haken, «Solution of the Four Color Map Problem,» *Scientific American*, vol. 237, no. 4 (October 1977), p. 108.
درسنا هذه المسألة بتفصيل أكثر من وجهة نظر البرهان: Gilles-Gaston Granger, *La Vérification* (Paris: Editions Odile Jacob, 1992), chap. 4, pp. 106-110.

مختزلة إلى: $\alpha+\beta$ وهي سلسلة من الرتبة 2؛ 2a+c هي سلسلة من رتبة 1، في المعقد الذي يثلّث الهرميّة الثلاثية.

ومن الواضح أنّ السلاسل من رتبة p تؤلف زمرة أبيليّة بالنسبة لعمليّة جمع واضحة (أو بالأحرى مدال على قاعدته المباسط من رتبة p)[18]. السلسلة الصفر هي السلسلة التي جميع معاملاتها أصفار (أو صفرية)، ومنكوس السلسلة $\sum_i U_i\sigma_i^p$ من الرتبة p هو السلسلة $\sum_i -U_i\sigma_i^p$ من الرتبة p.

3 ـ حافة المبسط من الرتبة p هي عندئذ السلسلة من الرتبة -p) (1 المؤلّفة من المباسط في المعقد وعددها (p-1)، مقرونة بمعاملات الالتقاء في المبسط من رتبة p. حافة مبسط من رتبة 0 وإذاً حافّة سلسلة من رتبة 0 هي صفر، يتعمّم التعريف ببساطة على السلاسل من رتبة p: حافّة السلسلة $\sum_i U_i\sigma_i^p$ من الرتبة p، مدونة ∂c^p، تساوي $\sum_i U_i\partial\sigma_i^p$ ويبيّن أن حافّة الحافّة لسلسلة هي صفر، وذلك بالنظر في مصفوفات الالتقاء. وعلى سبيل المثال، في الرسم 2، حافّة السلسلة من الرتبة واحد 2 a+c+f هي السلسلة من الرتبة صفر 2 (B - A) + (A - C) + (B - D) = 3B - A - C - D وحافّتها هي صفر بالتعريف. عمليّة الحافّة هي تشاكل متّصل لزمرة[19] السلاسل

---

(18) لنذكر أن المدال على حلقة K هو مجموعة من المواضيع M مع قانون تركيب داخلي يدوّن + وتطبيق نحو K x M في M، بحيث إن M تكون زمرة أبيليّة بخصوص + وإنه بخصوص $\lambda, \mu, 1$ في K مع x, y في M لدينا:

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$
$$1x = x$$
$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$$

(19) لنذكر أن تشاكل الزّمر المتّصل هو تطبيق يحافظ على قانون الزمرة، والتعاكس والعنصر المحايد.

من الرتبة p نحو زمرة السلاسل من رتبة (P-1) لأنه يحافظ على الجمع والتعاكس والصفر.

4 ـ الدورة هي سلسلة من الرتبة p حافّتها صفر، والدورات من الرتبة p تؤلّف مدالاً جزئياً للسلاسل من الرتبة p، وحافّة سلسلة من رتبة p هي دورة من الرتبة (P-1)، لأن $\partial\partial\ C^p = 0$. ولكن بالمقابل ليست كل دورة حافّة. الدورات الحافّة من الرتبة p تؤلّف مدالاً جزئياً B^p في المدال من الرتبة p المؤلّف من الدورات من الرتبة p والمدوّن Z^p، والذي هو نفسه مدال جزئي في المدال المؤلّف من السلاسل من رتبة p. والمؤثّر الحافّة هو بالتالي كذلك تشاكل متّصل للمدال Z^p نحو المدال B^{p-1} الخاص بالحافات التي عددها (p-1)، تشاكل متّصل بطلق المدال B^p، وهو جزء من Z^p، نحو العنصر O في B^{p-1}.

5 ـ دورتان من رتبة p تكونان متماثلتين إذا كان الفارق بينهما حافّة. إذا كانت الدورة C^p من رتبة p حافّة، عندها تكون C^p متماثلة مع الصفر، فالحافّة بهذا المعنى تتماثل مع السلسلة صفر. هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ (انعكاسية، تناظرية، ومتعدّية)، وتقسم إذاً مدال الدورات من الرتبة p إلى طبقات إقصائية. نعرّف جمعاً وتعاكساً على هذه الصفوف بطريقة واضحة، بحيث إن مجموعة صفوف التماثل من الرتبة p في معقد تؤلف زمرة أبيلية H^p، هي الفارق (نقول أيضاً حاصل القسمة)[20] بين زمرة الدورات من الرتبة p وبين زمرة الحافّات من رتبة p، أو زمرة الدورات من الرتبة p التي ليست حافّات (عدا الدورة صفر). الخصائص الجبريّة لزمر التماثل من

(20) حاصل القسمة Z/B لزمرة Z من خلال الزمرة الجزئية B هو الزمرة المؤلّفة من طبقات التكافؤ المشكّلة من عناصر Z بحيث إن الفارق يكون عنصراً في $B: x\text{-}y \in B, x, y \in Z$ هي عندئذ بالفعل علاقة تكافؤ.

الرتب المتعاقبة، من الصفر إلى n، هي التي تحدّد بعض الخصائص الطوبولوجية الإجمالية للمعاقد، فتميّز بالتالي الأشكال الفضائية التي تثلّثها.

3.2 ـ من الواضح أن لا مجال هنا للتوغّل أكثر في تقديم حساب التماثلات فقد طال برغم بساطته. ومع ذلك نريد أن نشير أيضاً إلى أن نظريّة الزمر التي هي جبرية بحتة تبيّن أن كل زمرة أبيلية منتهية التولد يمكن تفكيكها إلى مجموع مباشر يتألّف من زمرة غير منتهية من الرتبة k (أي إن جميع عناصرها، في الترميز الجمعي، هي أشكال خطيّة على Z من عناصر موّلدة عددها k)، ومن زمر دوريّة منتهية عددها s من الرتب $m_1, m_2 ... m_s$ (أي إن عناصرها هي على شكل 1.p، حيث p عدد أصغر أو يساوي m_{i-1}) بحيث إن m_i تقسم m_{i-1}. وبما أنّ زمر التماثل أبيلية فإنّ المبرهنة تنطبق عليها، فنطلق إذاً على رتبة زمرة التماثل H^p اسم عدد بتّي p، واسم معاملات الفتل من رتبة p على رتب الزمر الدوريّة المتناهية التي تظهر عرضاً. والحال أننا نبرهن على وجود علاقات بسيطة بين أعداد بتّي من رتبة p لمعقّد وبين عدد مباسطه من الرتبة p، فإذا كان عدد المباسط من الرتبة P هو a_p وكان عدد بيتّي المقابل b_p، كان لدينا:

$$\Sigma_p(-1)^p\, b_p = \Sigma_p(-1)^p\, \alpha_p .$$

نستنتج من هذه العلاقة، في حالة المعقّدات من الرتبة 2 التي تغطي سطوحاً (متعدّدات السطوح على سبيل المثال) مميّزة أولير ـ بوانكاريه : $\chi = S - A + F$. بخصوص الطارة مثلاً لدينا $b_0 = 1, b_1 = 2,$ $b_2 = 1$ et $\chi = 0$؛ لا يوجد معاملات فتل. بخصوص الكرة (مثلّثة على سبيل المثال في رباعي سطوح منتظم)، $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1$ et $\chi = 2$. بخصوص المسطّح الإسقاطي $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0$، ويوجد زمرة دوريّة من الرتبة 2، فهناك إذاً معامل فتل. ونبرهن على نحو

عام بأن عدد بيتّي من الرتبة n لمعقّد من الرتبة n هو 1 أو صفر وفق ما يثلّث متنوّعة من جانبين أو لا. فضلاً عن ذلك، عدد بتّي b_0 يساوي 1 (زمرة تماثل الرؤوس تتشاكل تقابليّاً مع زمرة الجمع Z للأعداد الصحيحة) إذاً وفقط اذا كان المعقّد مترابطاً، أي لا يقبل التقسيم إلى معقدين منفصلين.

نرى في هذه الأمثلة البسيطة كيف أن خصائص جبريّة بحتة ـ باقترانها في نهاية المطاف بخصائص توليفيّة تهم المعاقد ـ يمكن أن تتوافق مع خصائص فضائية إجمالية لتشكلات من نقاط، توسّع فتشمل مواضيع هندسية بحتة هي السطوح، والأحجام، ومواضيع أفضية من بعديّة n. ما هي الميزات الفضائية المختصّة التي يسمح بترجمتها حساب التماثلات؟ يظهر لنا بهذا الخصوص أن متصوّرين يؤديان دوراً أساسياً في هذا المضمار هما فكرة الحافّة وفكرة التثليث.

فكرة الحافّة، في تعميمها لفكرة الرؤوس في هيئة منتهية من النقاط تجد في الطوبولوجيا الجبرية تعريفاً هو في نفس الوقت راسخ البنية حدسياً وقريب تشكيلياً من المتصوّر الجبري ـ التحليلي للاشتقاق[21]. يمكن أن يقرّب ـ هذا المفهوم ـ قبل صياغته الجبريّة أو بعدها من المتصوّرات الأرسطية، تقريباً من شأنه أن يبرز إمكانية وصعوبة الدّمج العميق بين وجهة النظر الجبرية ووجهة النظر

(21) كما نراه في مبرهنة ستوكس العميقة: تكامل الشكل التفاضلي مأخوذاً على حافّة متنوّعة يساوي تكامل المشتقّة (الخارجية) لهذا الشكل التفاضلي مأخوذاً على المتنوّعة. المشتقّة الخارجية $d\omega$ تعرّف بحيث إن: $dd\omega = 0$ وفي حالة الدالّة (شكل تفاضلي من الدرجة 0)، تساوي المشتقّة الخارجية اذاً التفاضل: لدينا $f(B)\text{-}f(A) = \int_{AB} gradf$ حيث النقطة A والنقطة B تشكّلان حافّة المتنوّعة AB ذات البعد 1، أما grad f فهو الشكل التفاضلي $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}dz$، المشتقة الخارجية للدالّة f، القابل التطابق مع حقل متّجهات الإحداثيات $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

المجموعية في الطوبولوجيا، ذلك الذي فضح ألكساندروف عدم اكتمال تحقيقه[22].

يعرّف أرسطو، في **الفيزياء** (V (226 b 18-227 a 32 «المتجاور» كالذي هو في نفس الوقت «متعاقب»، أي إنه منفصل عن الذي يسبقه من خلال «لا شيء يكون من النوع عينه»، «وعلى تماسّ»، أي إن أطرافه هي «معاً في المكان نفسه». أما «المتواصل» فهو «تجاور» حيث الأطراف التي يتلامس بها الشيئان تتطابق «تتماسك معاً»[23]. الصعوبة الأرسطية هي بالأساس في التمييز بين التجاور والتواصل، من حيث إن الأطراف، بالنسبة للأول، تتمايز برغم أنها في المكان نفسه، وبالنسبة للثاني هي متطابقة. ذلك لأن المتواصل عند أرسطو لا يتصوّر كمجموعة من نقاط فعليّة، على نحو ما سيؤول إليه تصوّره في الرياضيات المجموعية بعد بولزانو، فالنقاط الأرسطية هي هنا منتهيات افتراضية. على أنّ هناك أطرافاً تتطابق بخصوص خطّين في تواصل. ربما نستطيع القول، لولا المفارقة التاريخية، بأنها في التجاور البسيط هي «حافّة»، وفي التواصل هي «منتهى» مشترك بالمعنى الحديث.

المفهوم الآخر الهندسي الرئيسي المدرج من خلال الطوبولوجيا الجبرية هو مفهوم التثليث، أي مفهوم تغطية فضاء من خلال شبكة نقاط وقطع موصلة بينها، وهي بطريقة ما، وعلى الأقلّ بالمعنى النسبي حافّات، فالمعقد الذي يثلّث فضاء:

---

(22) انظر: الاستشهاد، الفقرة 1.2 ص 92 من هذا الكتاب.

(23) انظر الفقرات 16 - 10 من: Gilles Gaston Granger, *La Théorie aristotélicienne de la science*, collection analyse et raisons; 22 (Paris: Aubier Montaigne, 1976), chap. X, pp. 304 sqq.

«هو قبل كل شيء مخطّط مجرّد يُعلمنا بالبنية التوليفية لمنظومة مجموعات جزئية من النقاط. ماذا تحاكي المباسط «تكوينياً»، إذا كانت «قائمة» أو «منحنية»، وما هي طبيعة الرؤوس، هذا لا يهمّنا في شيء؛ الشيء الوحيد الذي يعنينا هو الطريقة التي تتفكّك بها منظومة جميع الرؤوس في المعقد إلى منظومات من رؤوس مباسط منفردة»[24].

هاهنا يظهر بكل وضوح الجانب الطوبولوجي، غير المتري، والمجرّد جدّاً لهذا الجبر، لهذا التوليف. إنّ اللاتغيّر في الخصائص التي يعرّفها هو تماماً نظير اللاتغيّر بخصوص التحويلات ثنائيّة الاستمرارية في الطوبولوجيا المجموعية، كما يبرزها متصوّر «التطبيق المبسّطي»، الذي يحوّل المباسط من الرتبة p إلى مباسط من الرتبة p لها نفس البعد، وعلى نحو أخصّ يحوّل الحافّات إلى حافّات[25]. تكرار هذه التطبيقات يسمح عندئذ بعملية «تقريب مبسطي» لمعقد معيّن من خلال متتالية من المعقّدات المحافظة على البعد المبسطيّ، والجوارات بمعنى الفقرة 2.3، وأعداد بيتّي، معطياً من وجهة نظر جديدة معنى للتحويلات المستمرّة.

3.3 ـ على أننا نستطيع أن نقدّر بأن هذا الجانب من الطوبولوجيا الجبرية ينزع عن الفضائية ميزات جوهرية، لا تؤخذ في الاعتبار بحقّ إلا من وجهات نظر ما سميناه «تركيبة»، و«قياساً»، و«تعليماً». كما أقرّ بذلك إيلانبورغ وستينرود[26].

---

(24) Pavel Sergeevich Aleksandrov, *Elementary Concepts of Topology* ([n. p.: n. pb.], 1922), p. 40.

(25) شبيه الجوار المفتوح في الطوبولوجيا المجموعاتيّة هو «نجمة» النقطة: مجموعة النقاط بحيث كل مبسط يحتويها يحتوي رؤوس النجمة.

(26) Samuel Eilenberg and Norman Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology* (Princeton: Princeton University Press, 1952), p. VIII.

«المنظومة الجبرية المشتقّة [من منظومة فضائية بحتة] لا تمثّل سوى جانب من المنظومة الطوبولوجية المعيّنة، وهي أبسط بصورة عامّة. وفي ذلك حسنة تجريد المسألة الهندسية من جوانبها غير الجوهرية واستبدالها بنمط مألوف من المسائل التي يمكن أن نأمل بحلّها».

لكن البنى الجديدة راسخة الكيان إلى حدّ أنه قد تمّ تطويرها لذاتها في جبر بحت، «جبر التماثلات». الموضوع المقصود لم يعد حينئذ شكل فضائية، بل أصبح مباشرة جبريّاً، فصيلة M_n من الأمدلة من الرتبة n تبقى عناصرها مجرّدة تماماً، حتى وإن أبقينا على أسمائها الهندسيّة المصدر. نزع الفضائية هذا هو قطعاً خيبة أمل من وجهة النظر التي تهمّنا. ولكن لندوّن بالمناسبة أنه شاهد على الخصوبة الرائعة وعلى قوّة التجدّد التي لا تنتهي في النتاج الرياضي.

وسننهي هذا الفصل بتأمّل فى جانب آخر قريب جدّاً من جبرية توليفيّة للأشكال الفضائيّة ومكمّل لها هو: مفهوم ونظرية التشاوه (Homotopie).

4 ـ تشويه الرسوم المتواصل وأشكال الفضائية

4.1 ـ وجهة نظر التماثل هي في الجوهر جبرنة العلاقة بين الرّسوم وبين «حافّاتها». ويتحدّد شكل فضائية عندئذ من خلال تجميع رسوم لها نفس البعديّة، متكافئة بالتماثل، مع قيام توليف بين صفوف التكافؤ هذه وفق قانون زمرة، فسنفكّر في الفضاء حينئذ كمكان تكون جميع الرّسوم التي يمكن أن ترسم فيه ممثّلات لأحد تلك الطبقات أو إحدى توليفاتها. تأخذ وجهة نظر التشاوه في الاعتبار بدلاً من ذلك توزّع الرّسوم وفق التغييرات المستمرة التي يجيزها الفضاء الواقعة فيه. وهنا دور جوهري يؤديه صراحة متصوّر

الاستمراريّة. والمقصود في الحقيقة هو مفهوم طوبولوجي مجموعي كنّا نربطه في الأصل بخصائص نسيج الفضاء. ستكون جميع أشكال الفضاء التي ستؤخذ في الاعتبار هنا مزوّدة بطوبولوجية[27]، ومعظم الدوال التي ستدخل ستكون مستمرة، ولن تؤخذ الرسوم في الحسبان إلاّ بمقاس تشويه ثنائي الاستمرارية، أي تشاكل طوبولوجي، فصلنا بين دراسة الأشكال ودراسة التركيبات لا يمكن أن يؤخذ حرفياً إذاً كتعبير عن منافاة؛ هو يشدّد بالتأكيد على تمفصل هامّ في الفكر الفضائي، ولكن يجب أن لا يخفي الارتباط الحتميّ بين مختلف وجهات النظر في بناء الموضوع «فضاء»، وفي نهاية المطاف، بهذا المعنى بالذات هو موضوع طبيعي.

في حال دراسة تشويه الرّسوم والفضاءات التي يمكن أن ترسم فيها، تفترض الفكرة الأساس إذاً في التطبيق المستمرّ، لفضاء جزئي E في فضاء جزئي E'، أن هذين الفضائين الجزئيّين مزوّدان ببنية مجموعاتيّة : عرّفنا فيها مجموعات مفتوحة. وحينئذ نقول إن الدالّة مستمرّة إذا كان تطبيق مجموعة من E في مجموعة مفتوحة من E' يقتضي أن تكون المجموعة الأصل في E مفتوحة، فالفكرة العامّة في نظريّة التشاوه هي في هذه الحال صياغة الشروط التي بموجبها يمكن تحويل رسم إلى رسم آخر في نفس الفضاء أو في فضاء آخر من خلال تطبيق مستمرّ. أي إن التحويل من ناحية الحدس يتكوّن من متتالية من رسوم اختلافاتها لامنتهية الصغر، بين الرسم الأصل والرّسم الهدف، فهذه هي إذاً الشروط التي تؤسّس، كما بخصوص التماثل، لتوزيع بعض الرّسوم الأوليّة في زمر من صفوف التكافؤ،

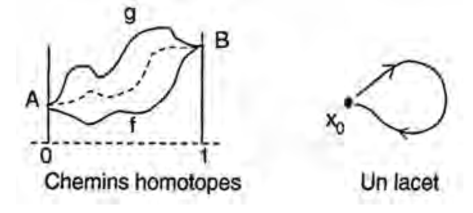
(27) أي إنّنا كما سنرى بالتفصيل، منحنا أنفسنا فصيلة من أجزاء هذا الفضاء، المفتوحات، حيث كل اتّحاد وكل تقاطع منتهية هو أيضاً مفتوحة.

تحدّد بنيتها بعض الخصائص الإجمالية للفضاء أو الفضاءات التي يحدث فيها التحويل.

4.2 ـ لنقتصر على رسوم من بُعد واحد. والرّسوم الأولية للتشويه هي الدروب بين نقطتين A, B، أي التطبيقات المستمرّة f العاملة في فترة مغلقة [a, b] من مجموعة الأعداد الحقيقية R، وفترة يمكن اختزالها [0, 1]، في فضاء، بحيث f(a) أو $f(0) = A$ مع f(b) أو $f(1) = B$. والدرب هو إذاً صورة مستمرّة بفعل f. وننظر عندئذ إلى تشويهات هي نفسها مستمرّة، من الدرب الصورة الحاصلة f نحو الدرب الصورة بالتطبيق g، ونقرن كل مرحلة من مراحل هذه التشاوهات بمؤشّر يؤخذ مثلاً في الفترة [0, 1] من مجموعة الأعداد الحقيقية. حينئذ يمكن أن نمثّل هذه التشاوهات في صورة f إلى صورة g، بدالّة F(x, t) مستمرّة بالنسبة للمتغيّرين x وt، ومع اعتبار هذين الأخيرين منتميين إلى الفترة [0, 1]، بحيث :

$$F(x, 0) = f(x) \qquad F(0, t) = f(0) = g(0)$$

$$F(x, 1) = g(x) \qquad F(1, t) = f(1) = g(1)$$



رسم 4

في هذه الحال نقول إن الطريق f [0, 1] والطريق g [0, 1] هما متشاوهان. والصفة تنطبق سواء بسواء على الدالّتين f وg وعلى الرّسمين صورتَيْهما. يمكن أن نبرهن بسهولة على أن علاقة التشاوه هي انعكاسية وتناظرية ومتعدّية، إنها علاقة تكافؤ. ونلاحظ أن

التشاوه بين رسمين هو حالة خاصّة من تطبيق مستمرّ يعمل من أحدهما على الآخر، وسنميّزه عن الحالة المضبوطة للتشاكل الشبهيّ. يقتضي هذا الأخير أن تكون الدالّة ثنائيّة التطبيق تقابليّاً وثنائية الاستمراريّة. بحيث إن رسمين متشاوهين لا يكونان متشاكلين شبهيّاً، كما دائرة ونقطة داخليّة فيها على سبيل المثال، وبالمقابل قد لا يكون رسمان متشاكلان شبهيّاً متشاوهين، إن كان المرور من أحدهما إلى الآخر مستمرّاً، كما سنرى ذلك قريباً، في حالة بعض العُقد.

الرّسم الأساسي في التشاوه هو درب خاصّ، منغلق على نفسه، شَرَكٌ نعرّفه بسهولة بفرضنا في الصياغة التي سبق تبنيها $f(0) = f(1) = x_0$ ، باعتبار القاعدة x_0 نقطة تختار اعتباطيّاً على الشرك. ونعرّف الشرك المعاكس، $f(1-x)$، أو الدرب المجوب في الاتّجاه المعاكس، والشرك الصفر أو ذا الدرب الثابت، وتركيب أو جمع شركين، المتمثّلين حدسيّاً في وضعهما طرفاً إلى طرف. علاقة التشاوه توزّع الأشراك من نفس القاعدة في طبقات تكافؤ منفصلة، هي المواضيع الحقيقية في نظرية التشاوه. ويمكن من دون شك تركيب هذه الطبقات بتوسيع تركيب عناصرها وهي تميّز على نحو ما شكل فضائية ترسم فيها الأشراك، فبالنسبة للكرة مثلاً إنّ الطبقة الوحيدة من الأشراك هو الصفّ المؤلّف من الأشراك المتشاوهة مع نقطة؛ وبخصوص الطارة تولد خطوط الهاجرة والموازيات صفّين منفصلين من الاشتراك.

تؤلّف الطبقات زمرة جمع هي، زمرة التشاوه من الرتبة 1 أو الزمرة الأساسيّة $\pi(M, x_0)$، لشكل فضائية (سطح، متنوّعة) حيث تُبنى الأشراك. إنها زمرة بالفعل لأننا نبيّن أن تركيب طبقتين يفضي إلى طبقة، وأنه تجميعيّ وأن الطبقة المتشاوهة مع نقطة تلعب دور العنصر المحايد. هذه الزمرة كان قد أدخلها ودرسها بوانكاريه. وفي

فضاء مترابط بالأقواس[28]، نبيّن أنّ زمرة بوانكاريه مستقلّة عن اختيار نقطة القاعدة في الأشراك، فبخصوص الكرة، على سبيل المثال، زمرة بوانكاريه زمرة مبتذلة، فهي تقتصر على العنصر المحايد؛ والزمرة الأساسية للطارة تتشاكل تقابليّاً مع زمرة أزواج الأعداد الصحيحة Z x Z: حدسياً، الأشراك هي بذلك مجاميع m شرك تتشاوه مع هاجرة وn شرك تتشاوه مع مواز[29].

يسمح التشاوه بالمرور من خصائص الرّسوم إلى خصائص الفضاء. نأخذ في الاعتبار فضاء طوبولوجياً S وفضاء طوبولوجيا T (أي إنهما مزوّدان بمنظومتي مفتوحات)، وتطبيقين مستمرّين، أحدهما f يعمل من S نحو T، والآخر G يعمل من T نحو S (ونكتب في اختزال رياضي: $T \rightarrow S$ و $S \rightarrow T$) فإذا كان حاصل ضرب g في f، وهو تطبيق يعمل من T في T، وحاصل ضرب f في g، وهو تطبيق يعمل من S في S متشاوهين على التوالي مع التّطابق في T وفي S، عندئذ نعلن أنّ للفضاءين S وT نفس النّوع من التشاوه. وبعبارة أخرى يكون للفضاءين نفس نمط التشاوه إذا وجدت دالّة مستمرّة من أحدهما نحو الآخر لها عكس بمقاس تشويه ما. العلاقة «نفس نمط التشاوه» هي علاقة تكافؤ، وتسمح بتوزيع الأفضية إلى صفوف إقصائية أكثر اتّساعاً من طبقات التماثل. لاتغيّر تشاوهي هو خاصّة لها نفس القيمة بخصوص فضاء ينتمي إلى طبقة تكافئه التشاوهي، وهذا هو بوضوح حال زمرة بوانكاريه. على سبيل المثال، واقع أن تكون هذه الزمرة مقتصرة على

---

(28) يكون الفضاء مترابطاً بالأقواس إذا وجد درب بين أي نقطتين.

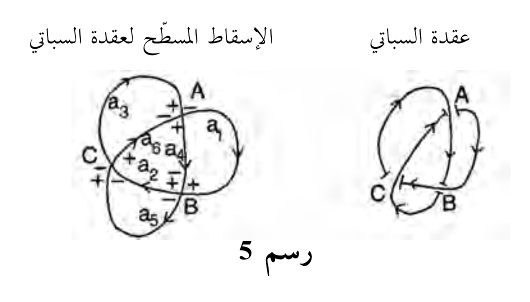
(29) نعرّف أيضاً زمر التشاوه من رتبة i، مدوّنة π_1 (A, M, xo)، بخصوص الفضاء M، والفضاء الجزئي A والنقطة xo في A، حيث العناصر هي طبقات التشاوه للدوال العاملة من القرص $D^i \rightarrow M$، بحيث إن الكرة S^{i-1} حافّة القرص D_i، تكون مطبّقة على A، ونقطة مختارة في S^{i-1} تكون مطبّقة على x_0. لن نتحدث بخصوصها.

العنصر المحايد يتطابق مع الخاصّة الطوبولوجية في أن يكون الفضاء بسيط الترابط، كما الكرة؛ إنها من نفس نمط تشاوه النقطة؛ وكذلك الأمر بخصوص الفضاء الإقليدي R^n، وأجزائه المحدَّبة.

4.3 ـ كمثال لتطبيقات التشاوه، سنقدّم بإيجاز بعض الخطوط الأولية لنظريّة العُقد.

العقدة هي صورة تطبيق إيغازي[30] ومستمرّ يعمل من المنحنى المقفل S_1 (الذي يتشاكل شبهيّاً مع الدائرة) نحو الفضاء R^3. نقول إن عقدتيْن متكافئتان إذا وجد تشاكل شبهي من الفضاء R^3 في R^3 عينه يحوّل العقدتين إحداهما إلى الأخرى، مع المحافظة على الاتّجاه المختار للمسير على العقد. نرى أن الأهميّة في هذه النظرية راجعة إلى علاقات الرّسم مع الفضاء الذي يحيط به.

لنأخذ في الاعتبار العقد المقتصرة على العقد «المضلّعيّة»، أي تلك القابلة للتفكيك إلى أقواس تكون الدّالة التي تعرّف هذه الأقواس خطيّة عليها. يمكن أن نرسم مثل هذه العقدة على مسطّح؛ وتشابكاتها ستمثلها تقاطعات الإسقاط المسطّح، بالإشارة بواسطة + أو ـ إلى كون القوس في موقع أعلى أو أدنى. في حال العقدة المسمّاة «عقدة السباتي»، توجد ثلاث نقاط تشابك A, B, C وستّة أقواس موجهة $a_1, a_2 ... a_6$، وبين (+A-B) (B-C-) (C-A+) . . . إلخ. (رسم 5).



رسم 5

(30) لنذكر أن التطبيق الفارد E→E' يقرن بكل عنصر في E عنصراً واحداً في E'.

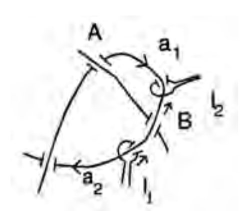
لنأخذ في الاعتبار في R^3 تكملة العقدة K، وزمرة تشاوه هذه التكملة، المسمّاة عندئذ زمرة العقدة. نبرهن بخصوص عقدتين على أنّ التشاكل بين زمرتي التشاوه الخاصّتين بهما شرط ملزم لتكافئهما لكنّه غير كاف. لذلك كان من المهمّ التمكّن من حساب زمرة العقدة كي نميّز ـ جزئياً ـ طوبولوجيتها. لنقدّم حالة عقدة السباتي K، فشرك في تكملة K يمكن أن يمثّل بزردة تحتضن قوساً من العقدة، دورانها موجّه بالنسبة إلى اتجاه ذلك القوس، ومقفلة على نقطة قاعدة في اللانهاية. وشركان متشاوهان يكونان بحيث يمكن الانتقال تشويهياً من أحدهما إلى الآخر من دون قطع أقواس العقدة (رسم 6). الأشراك الستّة في عقدة السباتي يمكن إرجاعها إلى ثلاثة أشراك مستقلّة، مولّدات زمرة دوريّة لانهائيّة من الرتبة 3، بسبب علاقات التشاوه التي تظهر إحداها في الرسم 6.

نشير إلى الأشراك الستّة الأصليّة بالرمز l_i، وإلى المولّدات الثلاثة الحاصلة بالرموز u، v، w ويكون لدينا: $l_1 = l_2 = ul_3 = l_4$ $= vl_5 = l_6 = w$. إذا أشرنا إلى تغيير اتجاه شرك بواسطة الأسّ - 1؛ تحقّقنا من أن:

$u = w^{-1}. v.w$

$v = u^{-1}. w.u$

$w = v^{-1}. u.v$



الشرك l_1 يتشاوه مع الشرك l_2 لأنه يدور بحرّية على القوس a_1 والقوس a_2 فيتحوّل إلى l_2 دون أن يقطع العقدة.

رسم 6

4.4 ـ هذا الظهور المزدوج للجبر في هندسة الأشكال، الذي درسناه في هذا الفصل وفي الفصل السابق، يحثّنا على التفكير في دور الجبر في الهندسة، في هذه الحال دور شديد الاختلاف عن دوره الديكارتي، الذي يقتضي تعليم الرسوم بواسطة أعداد بموجب محاور إحداثيات، واستخلاص الخصائص من خلال المعادلات. نلزم أنفسنا هنا بدور الجبرنة غير المتريّة للأشكال. عندئذ يظهر الجبر كاختصاص تنظيمي وأدواتي في الوقت نفسه. وكما يقول ك. شوفالييه: إنه ليس فقط «جزءاً من الرياضيات؛ إنه يلعب أيضاً في الرياضيات الدور الذي لعبته الرياضيات نفسها في الفيزياء خلال زمن طويل»[31].

وعلى نحو أعم، إنه يبرز الصنويّة عمليات ـ مواضيع بإعطائه خصائص الرسوم معنى عملياتياً. من هنا جاءت الأهمية الحاسمة لمتصوّر الزمرة. ومن وجهة النظر هذه لعلّ من الجائز القول بأن معرفة الفضاء تتطوّر إلى نظرية تغييرات أشكال، وأن الهندسة هي علم التحوّلات.

5 ـ نزع الفضائية النهائي: الجبر التماثلي

5.1 ـ في هذه الأثناء، ظهر للرياضيّين أن تطويرات جبر فضائي هي جدّ هامة وخصبة في ذاتها، حتّى أن الجبر التماثلي (أو مصاحب التماثل)، كما قلنا أعلاه، قد ولد منها. أصبح عندئذ موضوع النظرية وقد جرّد من جوانبه الهندسية الصرفة العائدة إلى رسوم فضائية وأشكالها، موضوعاً جبرياً بحتاً، بتعميمه زمر تماثل الفضاء

(31) Claude Chevalley, *Fundamental Concepts of Algebra*, Pure and Applied Mathematics; a Series of Monographs and Textbooks, 7 (New York: Academic Press, 1956), p. V.

وتشكيلاتها. ونختم ببعض ملاحظات موجزة تلامس هذا الجانب الجديد من العلاقة بين الجبر والهندسة.

لنستحضر بإيجاز واحدة من المشابهات التي ظهرت في التحليل، في نظريّة الأشكال التفاضلية، التي قادت إلى تحرير الموضوع التماثلي من محتواه الأصلي، وذلك بالمرور بموضوع جديد «حسّي»، لكنه غير فضائي، هو الأشكال التفاضلية[32]. لقد سبق أن أشرنا[33] إلى المشابهة الصورية بين عمليّة «الاشتقاق الخارجي» وعمليّة الحافّة في المعقّد. بصورة أعمّ، أبرز الرياضي دو رام وجدّد نظريّة «التماثل المصاحب» التي يتخطّى مداها مجال مواضيعها الأصليّة: الأشكال التفاضلية.

تشكّل الأشكال التفاضلية من الدرجات من صفر الى n منوّعة تفاضليّة بعدها n في مجموعها «فضاء» Λ، هو اتّحاد أفضية $\{\Lambda^i\}$، فنعرّف على الضرب الديكارتي Λ^q، للأشكال Λ^{p+q} والأشكال Λ^q، العمليّة التشاركية ومضادّة التناظر، التي هي الضرب الخارجي المشار إليه على نحو Λ، بحيث إن لدينا، بخصوص $\alpha \in \Lambda^p$ وبخصوص $\alpha \in \Lambda^p, \beta \in \Lambda^q, \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}(\beta \wedge \alpha)$، علاقة مستوحاة طبيعياً من هندسة المتجهات التقليدية. نعرّف أيضاً المؤثّر التفاضل الخارجي المطبق خطياً من Λ على Λ، بحيث إنّ:

---

(32) لنذكر أن الشكل الخطي من درجة p هو تطبيق خطّي من درجة p يعمل من فضاء خطّي نحو جسم سلّميّاته: $f(x_1, \dots x_p) = \mu \in C$؛ ويكون مناوباً إذا كان صفراً عندما يكون اثنان من المتّجهات Xi متساويين. الأشكال التفاضلية من الدرجة p هي تطبيقات تعمل من R^n نحو مجموعة الأشكال الخطّية من الرتبة P المتناوبة معرّفة في كل نقطة في R^n. إذا $P=1$، يمكن أن يُكتب الشكل التفاضلي بصورة وحيدة $Pdx+Qdy+\dots$ حيث، $P, Q, \dots$ هي دالاّت تعمل من نحو R^n. إذا $P=0$، الشكل الخطّي من رتبة P المناوب يكون سلّميّا، والشكل التفاضلي يكون بكل بساطة دالّة واقعيّة تعمل من R^n نحو R.

(33) انظر الهامش 21 الفقرة 3.2 من هذا الفصل.

$$d\Lambda^p \subset \Lambda^{p+1}$$

$$d \cdot d = 0$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p (\alpha \wedge d\beta), \alpha, \beta \in \Lambda^p$$

تتمتّع هذه العمليّة بالخصائص الصورية لمصاحب حافّة، أي العمليّة الصنوية لعمليّة الحافّة في الطوبولوجيا الجبرية: مصاحب الحافّة في سلسلة K من الرتبة p هي سلسلة من الرتبة p+1. وهنا صنوية بين الحافّة ومصاحب الحافّة بمعنى الفئات[34]: التّشاكيل التي تعرّفها هي من توجهات متعاكسة. مفهوم الصنوية هذا ـ وهو هندسي المعنى في الأصل، كما رأينا سابقاً بخصوص الأشكال الإسقاطية، يتّخذ هنا معناه الجبري الكامل. وعلى مستوى جبر الأفضية الخطيّة سبق أن ظهرت الصنوية كعلاقة بين فضاء وبين أشكاله الخطيّة؛ والتماثل المصاحب يعمّم المتصوّر ويعطي تصوّر الفئات هذا الأخير معناه الأكثر تجرّداً.

بإدراج مفردات الهندسة في الطوبولوجيا الجبرية، سنسمّي مصاحب دورة أيّ شكل تفاضلي «مغلقاً»، أي ذا مصاحب حافّة صفر، وستكون مصاحبات الحافّة الأشكال التفاضلية «الصحيحة»، أي تلك التي تكون حافّتها المصاحبة في Λ. نتحقّق من أن كلّ شكل صحيح هو مغلق، بفضل d.d = 0: وأن كلّ مصاحب حافّة هو مصاحب دورة. إنّ هذه المجموعات من الكيانات الجبرية قابلة للهيكلة كزمر (أو أمدلة): الزمرة Z المؤلّفة من مصاحبات الدورات، هي نواة d، والزمرة B المؤلّفة من مصاحبات الحافّات، صور d.

(34) لنذكر أن الفئة تتألف من مواضيع مجرّدة تماماً ومن تشكيلات تشرّك موضوعين، أحدهما هو مصدرها، والآخر هدفها. حالة خاصّة أكثر واقعيّة هي قطعاً الفئة حيث المواضيع هي المجموعات والتشكيلات هي الدّالات.

وندخل الزمرة H، حاصل قسمة Z على B، كما في الطوبولوجيا الجبرية. وطبقات التماثل المصاحب هي عندئذ طبقات المواضيع من شكل $\alpha + B, a \epsilon \Lambda,$ بخصوص كل بعد، والفارق بين شكلين من مصاحبي التماثل هو صحيح، لكونه مصاحب حافّة.

5.2 ـ بيد أنّ المحتوى المستعار هنا من التحليل (الرياضيّات التحليليّة) يمكن أن يحيّد هو نفسه، فلا تتعلّق النظرية إلاّ بالخصائص الجبريّة H وبالعملية d (عملية التفاضل). وفي لغة الفئات، لا يتعلق الجبر التماثلي لا بالفئة «الملموسة» للمعقّدات وتشكلاتها الحافّية في الطوبولوجيا الجبريّة، ولا بفئة الأشكال التفاضلية وتفاضلها الخارجي حتّى، بل بالدّلولات (ج دلول) التي تحوّل هذه الفئات إلى فئات من الزمر مجرّدة مع تشاكلاتها المتّصلة. وهكذا قادت فكرة الفضاء الرياضيّة إلى فكرة خصبة لكنها غريبة التجرّد مضمونها مواضيع وعمليّات في منظومة من الرموز الجبرية. على أنّنا لا نستطيع أن ننسى أنّ الحافز الأوّل للنظريّة كان في أغلب الأحيان حلّ مسألة أكثر اتصالاً بالملموس، وترابطاً مع ذلك، أنّ تطبيقات جديدة للنظرية المجرّدة على نماذج بعيدة جداً في الظاهر عن الموضوع الأصلي، قد حدثت، على غرار نظريّة الأعداد. وقد يكون من الواجب الاعتراف بأن هذه الحركة من الأخذ والردّ هي مثال جيّد لهذه المعرفة بالذات التي تكوّن جوهر التقدّم في الرياضيات.

القسم الثاني

تراكيب

نحاول إذاً التعرّف في أشياء الرياضيات الفضائية على ما تتشكل منه أساساً كأشياء، والتي سميناها «محتويات شكلية». إنها بالتأكيد محتويات وليست فقط أشكالاً عقلانية، لأن وجودها بحد ذاته يفيض في معنى ما بالخواص للأشياء التي يمكن التنقيب فيها وبرهنتها عبر تطبيق أساليب توضيحية ذات تحديدات بديهية بدائية تضعها. ذلك هو، كما نعتقد، معنى مابعد نظريات غوديل (Gödel) نحو ذلك. لكن هذه المحتويات ليست ذات طبيعة تجريبية، والتطوير التي يخضعها له العمل الرياضي ينتج أشياء أكثر فأكثر غرابة عن تلك التي يمكن أن يدركها فهم العالم المحسوس.

وهكذا، فإن المحتويات الشكلية التي يرتكز عليها المفهوم الأولي للأشكال والوجوه الفضائية، تسمح بإنتاج ممنهج، ولكن غير متوقع، لنوع من الأشياء لا يصل إليها حدس الفضاء. غير أن إدراك هذه المحتويات، التي هي أصلاً فضائية، أمر ضروري لفهم ما هو في أساسه فكر الفضاء. لإدراك معنى هذا التفكيك الخلاق للمفاهيم الفضائية التي نسميها «طبيعية»، من المناسب متابعة عمل الرياضيين

في نشاطهم، كلما أمكن، عبر مسارهم الإبداعي، الفردي دائماً لكن المعروض دوماً على العمل الجماعي «للعاملين على الإثبات» (حسب تعبير غاستون باشلار) الذي ينقد ويرفض ويثبت.

بعد فحص مظهر «الوجه» و«أشكال الفضائية»، نتمسك بهذا المظهر الآخر لفكر الفضاء الذي نحدّده بالصورة كتراكيب (Textures) معتبرين على التوالي أن مفهومية المضمون الهندسي يتوجّه نحو إقامة نظرية للمجموعات، ثم تطوير نظام التجريدات الهندسية. هنا أيضاً نشهد، في تمديد إنشاء المفاهيم الفضائية البحتة، تجاوزَها نحو أشكال لأشياء أكثر تجريدية .

الفصـــل الـــرابـــع
تصوريّة التواصل الفضائي

لنبدأ بنبذة تاريخية عن الصعوبات التي صادفها التفكير في تواصل الفضاء. بالطبع لا نستهدف شرح تاريخ تصوريّة التواصل هذه بل نريد أن نبرز فقط، من خلال بعض مراحل هذا التاريخ، طبيعة المحتويات التصوريّة التي تمّ تداولها. وسنقتصر على تقديم وتوضيح مرحلتين متباعدتين جداً في الزمان، وجدّ مختلفتين في سياقهما وفي حال الرياضيات في زمن كل منهما، متوقّفين على عتبة هذه الأرض الجديدة التي سوف تكون نظرية المجموعات[1]. لكن هذا التباين في وضع المفارقات التي طرحت من خلال التواصل هو تثقيفي تماماً. هكذا كان من اللازم ظهور حركة بنائية تقود من محاولة للتفكير في الفضاء إلى ضرورة نزع الفضائية عن المتصوّرات في نظريّة المجموعات هذه.

1 ـ مفارقات زينون في التواصل

1.1 ـ «زينون، زينون القاسي، زينون الأيلي

(1) التي تفحّص جان كافاييس تاريخياً وفلسفياً اكتشافها في أطروحته سنة 1938 تلك الأطروحة، التي لا مثيل لها على الدّوام : **ملاحظات حول تشكيل نظرية المجموعات.**

ألم تخترقني بهذا السهم المجنح

الذي يهتز، يطير ولا يطير. . .»

هكذا قال فاليري بكل روعة. معروفة من خلال النصّ الشهير لكتاب أرسطو السادس حول الفيزياء، مفارقات زينون الأربع حول الحركة كثيراً ما تمّ ذكرها، إن لم نقل شرحها، وما من شكّ في أن الرغبة بالحديث عنها مجدّداً ستكون نوعاً من الادّعاء. ومع ذلك لا نستطيع الاستغناء عنها إذا كنّا نريد أن نحاول إبراز معنى وأسس الفكر الفضائي. لقد سبق أن أشرنا أعلاه[2] إلى تحليل التواصل عند أرسطو في معرض مفهوم «الحافّة». من منظور أخصّ هنا، ما يهمّنا هو طرح أرسطو لقضيّة زينون[3]. يجب أن نسجّل أوّلاً أنّ القضيّة لا تتعلّق بالفضائية فقط، بل بتركيب الوقت والفضاء، في الحركة، كنوعين من التواصل. «يستدلّ زينون بمكر»، على أنّ من المستحيل التفكير في الحركة من دون تناقض، ويعطي أربعة أمثلة على ذلك: السهم، أخيل، التثنية التفريغ، الملعب. في الأمثلة الثلاثة الأولى، تظهر بؤرتان من الصعوبة، الأولى، في السهم بشكل خاص، والثانية في الثنائي وفي أخيل.

بخصوص السهم، يتأتّى الإحراج من اعتبار الفضاء مكوّناً من نقاط والوقت مكوّناً من لحظات، لا تقبل التقسيم. بالفعل في كل لحظة، يجب أن يكون السهم إذا وجد ساكناً، في فضاء يتساوى دائماً مع ذاته[4]. حلّ أرسطو هو أن المتواصل لا يتشكّل إطلاقاً من نقاط أو لحظات لا تقبل التقسيم[5]: «أطلق اسم متواصل على الذي

---

(2) الفصل الثالث، الفقرة 3.2، ص 106 ـ 105 وما يليها.

(3) *Physique*, VI, 239 5.

(4) المصدر نفسه، 239b 6.

(5) المصدر نفسه، 229b 8.

يقبل التقسيم إلى أجزاء تقبل دائماً التقسيم»[6]. الفضاء والوقت يقبلان التقسيم بصورة لانهائية، بحيث يمكن أن يكون السهم متحركاً في كلّ جزء منهما. وستكون النقاط واللحظات فقط، كما سجّلنا أعلاه، منتهيات ممكنة الوجود.

في التفريغ الثنائي وفي أخيل، تتأتّى الصعوبة من لانهائية الحالات المتعاقبة المجوبة أثناء الحركة، فالمتحرّك، كي يبلغ هدفاً، يجب أن يبلغ أولاً نصف المسافة المفروض قطعها، ومن ثم نصف الباقي. إذاً سيكون من واجبه أن يقطع ما لا نهاية من المواضع في وقت هو مع ذلك متناه، في حال حصول الحركة. والنتيجة نفسها أن أخيل لن يلحق أبداً بالسلحفاة، رغم أنها أبطأ، لأن عليه دائماً أن يلحق أولاً بالنقطة التي انطلق منها «الفارّ». وتبقى الصعوبة قائمة، وإلاّ فإنّ البواقي المتعاقبة من المسافة المطلوب قطعها لا يكون أحدها نصف الآخر. أرسطو يميّز إذاً مفهومين من اللانهاية[7]، وهذا ما كان ينقص عند زينون. لانهاية التقسيم أو «وفق الأطراف»، واللانهاية وفق الكمية. وفق الثانية، من غير الممكن فعلاً أن يُقطع في وقت متناه ما لانهاية من أجزاء تُجمع، ولكن هذا ممكن بخصوص اللانهاية وفق التقسيم «لأن الوقت نفسه هو لانهائي بهذه الصورة». قد تكون الحركة في التفريغ الثنائي وفي أخيل ممكنة لأنّ هناك نفس اللانهاية من أجزاء الوقت وأجزاء الفضاء. من دون شك يجب أن يُفهم أنه إذا كان للفضاء المفترض قطعه نفس اللانهاية من الخطى كالتي هي لفترة الوقت اللازم لقطعه، فسينجرّ عن ذلك أن فترة الوقت متناهية، إذ إن الفضاء المطلوب قطعه متناه. هذا

(6) المصدر نفسه، α25 232.

(7) المصدر نفسه، a22 233.

الاستدلال لا يمكن أن يقنعنا، فهو يماثل في الظاهر مساواة «القوة» بمعناها في نظرية المجموعات مع مساواة المقادير. أما التمييز بين اللانهايتين، فمن المؤكّد أنه غير واضح بالتّمام.

لكن قد نتمكّن من تفسيره بصورة مرضية باستعمال وسائل التفكير التي بحوزتنا اليوم. هي في رأيي عمليّة مبرّرة من حيث إن الأمر لا يتعلّق البتّة بتحميل كاتبنا في مفارقة تاريخية؛ متصورات لا يستطيع حملها بل بالاكتفاء باستعمالها كأدوات لتوضيح مفاهيم وتمييزها وهي في الأصل غير واضحة، فنقول إذاً إن التواصل وفق التقسيم يرجعنا إلى المفهوم الحديث لتامّيَّة المجموعة. تشكّل المواقع المتعاقبة لأخيل، أو للمتحرّك في التفريع الثنائي متتالية تستوفي شرط كوشي، ذات فوارق تتصاغر بصورة لانهائية[8]. هذه المتتالية تتقارب في الفضاء المعني لأن هذه هي خاصّية «المتواصل» في كونه فضاءاً تامّاً. أما عن التواصل وفق الكمية، فإن الاستحالة في قطع المسافة في وقت متناه تتوافق مع عدم التدمّج. أي استحالة أن نجد في تغطية لهذا الفضاء تتألف من لانهاية من الأجزاء المفتوحة تغطية جزئية متناهية، أي مؤلفة من عدد محدود من المجموعات[9].

مفارقة الملعب هي من نوع مختلف. تقتضي في الجوهر أن نأخذ في الاعتبار متحركاً يسير بموازاة متحرك آخر ولكن في الاتجاه المعاكس، بسرعات مقابلة نسبة إلى معلم غير متحرك. عندئذ يمرّ متحرّك أمام الآخر في وقت أقلّ بمرّتين من الوقت اللازم للمرور

---

(8) لنذكر بأن متتالية كوشي ذات الحد u_n هي بحيث توجد رتبة n يقترن بها أنّ الفارق $u_n - u_{n+t}$ يكون ويبقى صغيراً بقدر ما نريد، بخصوص أي عدد موجب t. ويكون الفضاء تامّاً إذا كان لكل متتالية من متتاليات كوشي منتهى في ذلك الفضاء.

(9) في حالة التفريع الثنائي، قد يقوم التفسير على نحو آخر وبعبارات حديثة، ذلك باعتبار وجود منتهى للمجموع اللانهائي: $1 + 1/2 + 1/4 + ... 1/2^n + ...$. لكن الاستدلال لا ينطبّق على أخيل.

أمام المعلم غير المتحرّك، قاطعاً مع ذلك المسافة نفسها. يُستنتج من ذلك أن وقتاً يساوي ضعفه، كما يفعل زينون، هو خطأ واضح، كما يقول أرسطو، لعدم اعتبار الحركات النسبية[10] عندئذ. لكن الجوهر هنا لم يعد يتعلّق بتواصل الوقت وتواصل الفضاء.

1.2 ـ نرى أن مفارقات زينون قد فسرها أرسطو على أنها تتعلق بتركيب المتواصل بواسطة ما لا يقبل التقسيم، وهذا أمر سيظلّ يشكّل القضيّة الرئيسية في أساس التحليل الرّياضي في زمن كافالياري، ونيوتن، ولايبنتز. لكن الموقف الأرسطي لم يعمل على إظهار أي خاصّية لما هو فضائي، فنحن إذاً وبصفة مبكّرة على طريق تجريد نازع للفضائيّة عن الخصائص النسيجية لمتصوّر الفضاء.

صحيح أنّ عرض سنوات السبعين لقضيّة تواصل كانتور ـ ديديكند الذي سنقوم بتقديمه، يتعلّق بالتواصل الهندسي فقط، لكنه يظهر مفهوم قوّة مجموعة من نقاط، الذي سيقود إلى نظرية عامة للمجموعات ابتكرها كانتور وقام بتطويرها أولاً ديديكند.

على أنّ من الملائم أن نلاحظ أن مصدراً آخر للنظرية يمكن اكتشافه في التحليل، يبيّن بكل وضوح الوحدة العميقة للرياضيات والتقارب في التجديدات التي يظهرها لنا تاريخها التصوّري. أولاً في الصعوبات التي ظهرت من خلال تعريف استمرارية دالة الذي حل جزئياً للمرة الأولى على يدي بولزانو[11]. ومن ثم في الصعوبات التي

---

(10) حلّ أرسطو هو معاينة نسبيّة ظاهريّة في الوقت بالنسبة إلى مراقب يتحرّك. ومع ذلك سنكون مخطئين إذا رأينا فيه استباقاً للنسبية المقيّدة، نظريّة تلعب سرعة الضوء فيها دوراً جوهرياً.

(11) Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, [Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. no. 153] (Leipzig: Ostwald, 1905).

أثارها تقارب متسلسلات فورييه[12]. والمسألة الجامعة التي ستبرز في ما بعد بصورة أساسية في أعمال كانتور هي مسألة تعريف عام وغير متناقض للعلاقة بين المتناهي واللامتناهي أو النهائي واللانهائي.

2 ـ مفارقة كانتور

2.1 ـ بداية نجد في تراسل كانتور ـ ديديكند بين العام 1872 والعام 1879[13] شهادة استثنائية عن تبادل آراء مثمر بين اثنين من الرياضيين المبتكرين. وفيه كذلك عرض للانتقال من تأمّل في المتواصل الهندسي إلى ما يصفه كانتور نفسه «بشيء أعمّ وأهمّ بكثير»[14] أي نظريّة المجموعات غير المتناهية. وسوف يصبح بالإمكان إقامة الافتراض بأن كل نقطة على خطّ يمكن أن تتعلّق بعدد ـ هو افتراض ضمني منذ اكتشاف الأقدمين للتمثيل الرقمي للأعداد الصمّاء أي غير القياسية[15]، كمبده صالح للاستعمال مباشرة بعد أن تمّ، على يدي ديديكند وكانتور، تأسيس نظرية محكمة للأعداد الحقيقية كمتتاليات متقاربة من الأعداد النسبيّة أو كقطوع في متتالية هذه الأخيرة، والأمران سيّان. ومنذ ذلك الحين ستصبح قضيّة

---

(12) انظر حول هذه النقطة مؤلّف جان كافاييس المذكور في الفصل الأول Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, introduction de Jean-Toussaint Desanti; préface de Henri Cartan ([Paris]: Hermann, 1981).

(13) تراسل حقّقه أيميّ نوثر وجان كافاييس، ونشر في العام 1937، وترجم في كافاييس: Jean Cavaillès, *Oeuvres complètes de philosophie des sciences, présentation par Bruno Huisman; suivi de In memoriam par Georges Canguilhem* (Paris: Hermann, 1994).

(14) المصدر نفسه، رسالة في 5 تشرين الثاني/ نوفمبر 1882.

(15) نظريّة أودكس الرائعة حول الأعداد الصمّاء هي كاملة من الناحية الطوبولوجية، لكن الأعداد الصمّاء لم تكن تعتبر أعداداً عند الأقدمين.

التواصل الهندسي مرتبطة ارتباطاً عميقاً بقضية التمثيل العددي لنقاط مقطع مستقيم. حتى أنّ كانتور طرح في الرسائل الأولى وقد قرأ كتاب ديديكند حول **التواصل والأعداد الصمّاء**[16] (*Continuité et nombres irrationnels*) (1888)، قضية لا تتعلّق مباشرة بالمتواصل الهندسي بل بالأعداد: هل يمكن مقابلة واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة الموجبة وبين الأعداد الحقيقية الموجبة، وبرهن أن هذا الأمر مستحيل[17]. ولكن ابتداءً من 5 كانون الثاني/ يناير 1874، وضع كانتور نفسه في منظور المتواصل الفضائي، متسائلاً عمّا إذا «كان سطح ما (مربع مع حافته، على سبيل المثال) يمكن أن يوضع في مقابلة واحد لواحد مع خط (قطعة مستقيم مع طرفيه، على سبيل المثال)، بحيث إن كل نقطة في السطح تتوافق مع نقطة على الخط، والعكس بالعكس أي كل نقطة على الخط تتوافق مع نقطة في السطح».

وسيعود إلى الموضوع في 20 حزيران/ يونيو 1877، صائغاً القضية بعبارات أعمّ، عبارات وضع مقابلة بين رسوم متواصلة بعديّتها n ورسوم متواصلة أحاديّة البعد وسوف يطرح برهانين لهذه الإمكانية، ظهرا له أولاً متعارضين مع طبيعة شكلي الفضاء هذين، مختلفي البعديّة.

2.2 ـ وضع كانتور مبدهاً أساسياً، قبله ديديكند، يتمثل في أنّ جميع نقاط المستقيم يمكن أن تتمّ بأدلّة (ج. دليل) من خلال جميع الأعداد الحقيقية. وعندئذ نتحدث عن المستقيم العددي أو المستقيم

(16) مترجمة في: *Les Nombres, que sont-ils et quoi servent-ils*, introduction de M. Sinacoeur, la bibliothèque d'Ornicar.

(17) المصدر نفسه، 7 كانون الأول/ ديسمبر 1873.

الكمّي، فيمكّن أن توضع نقاط المقطع [0, 1] إذاً في مقابلة واحد لواحد مع الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد. وتكون إحداثيات نقاط المربع $[0, 1]^2$ والحالة هذه أزواج الأعداد الحقيقية الواقعة بين الصفر والواحد. يرتكز البرهان الأول (20 حزيران/ يونيو 1877) على تمثيل عشري للإحداثيات الحقيقية لنقاط المربع $[0, 1]^2$:

$0, a_{11}\ a_{12}...a_{1n}...$ أي المتتالية $x_1 = a_{11}\ .1/10 + ...a_{1n}..\ 1/10^n + ...$

$0, a_{21}\ a_{22}...a_{2n}...$ أي المتتالية $x_2 = a_{21}\ .1/10 + ...a_{2n}.\ 1/10^n + ...$

ولنقاط القطعة [0,1]:

$0, b_1\ b_2...b_n...$ أي المتتالية $y = b_{1.1}\ .1/10 + ...b_{n.1}\ 1/10^n + ...$

نقيم المقابلة

$b_r = a_{st}$

باعتبار أن $r = 2(t\text{-}1) + s$ حيث t عدد صحيح يتغيّر من الواحد إلى اللانهاية، وحيث s عدد صحيح موجب أصغر من اثنين.

القيم x تحدّد إذاً القيم y، والعكس صحيح. على سبيل المثال:

$x_1 = 0{,}3456...\ x_2 = 0{,}7621...$

تعطي بصورة وحيدة الدلالة:

$y = 0{,}37465...$

حيث نرى أن $b_1 = a_{11}\ b_2 = a_{21}$ وبصورة أعم $b_{2n\text{-}1} = a_{1n}$؛ $b_{2n} = a_{2n}$؛ باعتبار أنّ الرقم في تمثيل القيمة y أخذ على التوالي في متتاليتي القيمة x_1 والقيمة x_2.

لكن ديديكند (22 حزيران/ يونيو 1877) أشار إلى كانتور بأن

مقابلته بين المربّع والمقطع ليست واحداً لواحد، لسببين اثنين، فبالفعل، يمكن أن يتعلّق تمثيلان عشريان بنفس قيمة الإحداثية، وإذاً بنفس النقطة، على سبيل المثال التمثيل $0, a_1a_2... a_n\ 000...$ والتمثيل و$a_{n1}\ 999...$، فمن المفروض إذاً اختيار أحد هذين التمثيلين، الثاني على سبيل المثال، واستبعاد الآخر. من ناحية أخرى، حتى مع هذه المراعاة، لا تطبيق شاملاً للمربّع على القطعة، إذ لا مقابلة لبعض نقاط في هذه الأخيرة ممثّلة بعدد عشري y مع أي زوج (x_1, x_2) من الأعداد العشريّة الممثّلة لنقطة في المربّع. لأنه إذا كانت، ابتداءً من رتبة معينة، جميع الأرقام y من الرتبة الزوجية (الأعداد b_{2n})، أو جميعها من الرتبة الفرديّة (الأعداد b_{2n-1})، أصفاراً، فالأعداد x_1 أو الأعداد x_2 ستصبح كسوراً عشرية مستبعدة بالملاحظة السابقة، على سبيل المثال من شكل $0, a_1... a_n\ 00...$

2.3 ـ أقرّ كانتور بهذا النقص، ودوّن مع ذلك بأنه «قد برهن أكثر مما كان يأمل» (23 حزيران/ يونيو 1877)، لأنه يوجد على نحو ما، نقاط في المقطع أكثر مما يوجد في المربّع. ثمّ إنّ المقابلة بين المربّع وبين المقطع مشتركة، وهذا، قال كانتور هو الأساس بالنسبة إلى برهانه. لكنه سيقيم برهاناً جديداً يثبت هذه المرة التقابليّة (التقابل واحداً لواحد)، فيمثّل النقاط غير القياسيّة (الصمّاء) في القطعة وفي المربّع من خلال كسور متواصلة متناهية. ومن ثم يفرض، كما في السابق: $b_{2(t-1)+s} = a_{st}$ (مع إشاراتنا السابقة). وعندئذ يكون التقابل واحداً لواحد، لكنه لا يتعلّق إلا بالنقاط ذات الإحداثيات غير الصمّاء. والمطلوب إذاً هو أن نبرهن على أنّ هذه النقاط في القطعة [0,1] يمكن وضعها في تقابل مع جميع نقاط المقطع.

لهذا الغرض ندخل في المقطع [0,1] متتالية ε_n من الأعداد غير القياسيّة الآيلة نحو الطرف 1.

لنأخذ في الاعتبار المتغير $f=\{u_n\}$ الذي يأخذ جميع القيم في [0,1] ما عدا قيم المتتالية ε_n.

ولنأخذ في الاعتبار أيضاً المتتالية r_n المؤلّفة من الأعداد النسبيّة في [0,1] والمتتالية $e=\{v_n\}$ المؤلفة من النقاط غير القياسية (الصمّاء) في [0,1]، والمتشكّلة بالتالي من نقاط [0,1] ما عدا الأعداد r_n.

يمكن أن نضع القيم u للمتغير f في تقابل واحداً لواحد مع المتتالية $e=\{v_n\}$ المؤلفة من الأعداد غير القياسيّة v_n في [0,1] من خلال الدالّة الآتية:

إذا u، في f، غير قياسيّة، تكون v في e تساوي u

إذا u، في f، تساوي r_n، تكون v في e تساوي ε_n

بحيث إنه ـ بالتعاكس ـ:

إذا v، في e، تختلف عن ε_n، تكون u في f تساوي v

إذا v، في e، تساوي ε_n، تكون u في f تساوي r_n

ونكون بذلك قد أثبتنا التساوي، تساوي القوى، بين $[0,1]-\{\varepsilon_n\}$ وبين الأعداد غير القياسيّة $[0,1]-\{r_n\}$ كلمة التساوي ليست في نصّ كانتور، لكنه أدخل في 23 تشرين أول/أكتوبر 1877 كلمة قوّة مجموعة وكلمة تكافؤ القوى.

2.4 ـ نثبت إذاً أنّ هناك تقابلاً واحداً لواحد بين $[0,1]-\{\varepsilon_n\}$ وبين المقطع [0,1] بكامله، بتطبيقات متعاقبة على الفترات $[\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}]$ في خاصية البرهنة التمهيدية لـ $[\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}] - \varepsilon_n$ و$[\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}]$ وهذه الخاصة الأخيرة هي تعميم لمأخوذ (مبرهنة تمهيدية) يؤكّد تساوي [0,1] مع (0)-[0,1]، الذي تمت البرهنة عليه بواسطة منحنى كنتور، المطبّق للفترة [0,1] على الفترة [0,1] محذوفاً منها الطرف 0.

بما أننا قد أثبتنا تكافؤ القوّة بين الأعداد غير القياسيّة في [0,1] وبين النقاط في (ε_n)-[0,1]، فإنّ لدينا في النهاية تكافؤ القوّة بين الأعداد غير القياسيّة في [0,1] وبين نقاط [0,1] بكامله، فبرهان التقابل واحداً لواحد بين نقاط المقطع وبين نقاط المربّع، المبيّن قبلاً بخصوص الإحداثيّات الصمّاء، يمدّد إذاً على جميع النقاط ذات الإحداثيّات الحقيقيّة.

«أراه ولا أعتقده»، هكذا قال، بالفرنسية، كانتور في رسالة في 29 حزيران/ يونيو 1877، فمن المنظور الفضائي للمواضيع الهندسية، يتعلّق الأمر فعلاً بمفارقة. لكن مفهوماً أساسياً في نظريّة مجموعات مجردة كان قد تمّ إدخاله انطلاقاً من مسألة هندسية: إنه مفهوم قوّة مجموعة. وسيبني كانتور عندئذ نظريّة المجموعات غير المتناهية. والحال أنه، ببقائه متمسّكاً بالمنظور الهندسي يعترف بعدم رضاه عن هذا النوع من التحييد لأبعاد هذه المواضيع.

«كُتب، أنّ من الواجب البحث عن الفارق الموجود بين رسمين يختلفان من حيث عدد الأبعاد لسبب آخر غير السبب المعتقد مميّزاً لعدد الإحداثيات المستقلّة» (23 حزيران/ يونيو 1877).

لذلك، سوف يوحي ديديكند بأن سبب هذا التباين الظاهر في عدد الأبعاد، هو عدم استمرارية التقابل الذي حصل عليه كانتور، فالتقابل بين النقاط ذات الإحداثيات غير القياسيّة، كما كتب إلى كانتور، هو مستمر من دون شكّ، بمعنى أن التغيّرات هي صغيرة بقدر ما نريد. ولكن من أجل تجاوز النواقص التي بقيت قائمة في مجموعة القيم الحقيقيّة

«أنت مجبر على أن تدخل في التقابل انقطاعاً مخيفاً يسبّب الدوار، انقطاعاً يختزل الكلّ إلى ذرّات؛ بحيث إن كل جزء مترابط بتواصل، مهما كان صغيراً، في أي مجال من المجالات يظهر في رسمه ممزّقاً كليّاً، غير متواصل» (متقطّعاً) (2 تموز/ يوليو 1887).

عندئذ وضع ديديكند مخمّنة مبرهنة مفادها هو إذا نجحنا في إقامة تقابل واحداً لواحد («تامّ ومعتكس») بين نقاط متعدّدة متواصلة من بعدية a وبين نقاط متعدّدة متواصلة من بعديّة b، وكان a مختلفا عن b، يكون ذلك التقابل بالضرورة غير مستمرّ (منقطعاً) في كل نقطة (2 تموز/يوليو 1877). وهكذا يكون قد رمّم متصوّر عدد الأبعاد كميزة لامتغيّر في الشكل الفضائي شريطة قيام تحويل تقابلي وثنائي الاستمرارية، فهو يتعلّق بالطوبولوجيا إذاً، وسوف نتفحّصه بعد أن نكون قد درسنا معنى وتشكيل المتصوّرات المجموعيّة المؤسّسة لهذا الاختصاص.

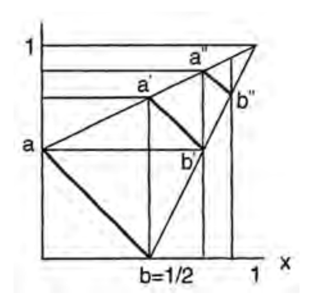
2.5 ـ رأينا في مثالين الدور الذي أدته الصعوبات التي تمّت مواجهتها في محاولة وضع تصوّرية للتواصل الفضائي. وفي الحالتين، وضحت المسألة كإمكانية مقارنة المتتالية غير المتناهية من نقاط تقع في متواصل، متواصل من زمن ومتواصل من فضاء مجوب بالنسبة إلى زينون، ومتواصل من خط ومتواصل من مساحة عند كانتور. وتمثّل تقدّم الطريقة الجوهري في هذه الحالة الأخيرة في إدخال مفهوم الدالة التقابلية بين مجموعتي نقاط. لكنّ اللحظات والمواضع، في التفسير الأرسطي للمفارقات الزينونيّة ليست مكوّنات متواصلي الزمن والفضاء وبخصوص الماسادوني ينبع سبب الصعوبات النهائي بالضبط في اعتبار المتواصلين كليهما كمجموعة لحظات أو نقاط، فهما رسوم فضائيّة أجزاؤها لحظات وأمكنة. وعلى النقيض من ذلك، في عصر كانتور وديديكند، تشخّص المتواصلات الهندسيّة كمجموعات من نقاط، هي عناصرها وهذا الاختزال للفضائي هو الذي سمح إذاً بالاستعمال المحكم لمتصوّر الدالّة، وبتوضيح مفهوم تساوي القوّة، مفهوم يتعلّق بمتواصلات منزوعة الفضائيّة على نحو ما.

ومع ذلك، لا يفوتنا أن نلاحظ أن إحدى مراحل برهان كانتور

تستعمل أيضاً الفضائية على نحو نصف حدسي، استعمالاً ثانوياً وهذا صحيح، ذلك في أنه في مرحلة إثبات تكافؤ القوّة بين [0,1] وبين (0)-[0,1]، دور المنحنى المسمّى منحنى كانتور.

هذا «المنحنى» الديكارتي في منظومة محاور هي جهات المربّع الوحدة يتشكّل من النقطة (1,1) ومن لانهاية من (ab), (a′b′). . . المحذوفة منها أطرافها b, b′ . . . والنقاط b, b′ . . . هي إسقاطات تقسيمات محور القيم x على النقاط $0, 1/2, \ldots 1/2^n$ . . . كلّ قطعة من المنحنى تقترن إذاً بتطبيق خطيّ للفترات الموجّهة نصف المفتوحة [0 b, [b, β′, [β′, β″... نحو المقاطع نصف المفتوحة، الموجّهة في الاتجاه المعاكس [a, 0, [α′, a, [α″, α′... بحيث إن المقابلة النهائيّة بين [0,1] و(0) - [0,1] هي منقطعة في كل نقطة، مع تكرّر ذلك الانقطاع بصورة لانهائية على مجموعة القطع $[a_n, a_{n+1}[$ في المتواصل [0,1].

ومع ذلك تبقى النتيجة النهائية لحل كانتور وظنية ديديكند أنّ تمثيل الرسم الفضائي يعود بنا إلى نظرية المجموعات وقد نزع عنها الفضائية، وسيُبنى عليها، في الحقيقة، إعادة الفضأنة الجزئية لطوبولوجيا مجموعيّة.



النقاط b,b′,b″ ليست جزءاً من المنحنى
النقاط a,a′,a″ تؤلّف جزءاً من المنحى
المنحنى يطبّق [0,1] على (0) - [0,1].

رسم 1

الفصل الخامس

التجريد الطوبولوجي

المفهوم الحدسي للاستمرارية ضبابيّ لحد الآن، وهو حقاً المفهوم الأول في تحديد نسيج الفضاء. وقد رأينا بعضاً من أوجه الصعوبات التي صادفها تصوّره في مناسبتين مثاليتين في تاريخه. قد يمكّن تلخيص الصعوبة المركزية مع التبسيط، في لزوم دمج مفهومي التعاقب والتجاور في متصور واحد. لكن تبين أن المسألة الأساسية هي ميزة لانهائية الأقسام، أو العناصر ـ المفترضة ـ في متواصل فضائي، هو منبع المفارقات، أي اللزوم المنطقي بأن نفكّر ضد الحدس. وسوف يرتكز الحلّ على نزع الفضائية جذرياً وهذا ما لحظه بولزانو، وتناوله بالكامل كل من كانتور وديديكند. ودون أن ندّعي النظر هنا في تفاصيل ولادة هذا الحقل العلمي الأساسي، نظرية المجموعات، عندئذ، فسوف تشغلنا وإن كانت فضائية الطّراز، من حيث إنّ تركيبها لا يمكن فصله عن تركيب المتصوّرات التي سوف تعطي في النهاية محتوى للفكر النسيجي الفضائي أي متصوّرات طوبولوجيا المجموعية.

بداية سنتفحّص محاولات بولزانو في إدخاله بخصوص المتواصل الهندسي، متصوّرات مجموعية. لم تكن المفاهيم التي

عرّفها مؤكّدة بعد، لكنه طرح لها أول تطبيق فعّال في إثباته الشهير للمبرهنة القائلة بأنّ بين أي قيمتين تُعطيان لمعادلة قيمتين متعاكستين يوجد على الأقل جذر حقيقي لتلك المعادلة[1] ولكن كما لاحظ بعمق ج. كافاييس، لكي يدخل متصوّر جديد فعلياً في الرياضيات، يجب أيضاً أن تظهر لذلك طرائق استدلال جديدة، وهذه هي الحال ـ تدقيقاً ـ بالنسبة لإثبات هذه المبرهنة.

بولزانو والمتصوّرات المجموعية

1.1 ـ تعريف التواصل الهندسي هو نقطة انطلاق بولزانو، ففي **مفارقات اللانهاية**[2] (1851)، أراد أن «يتشكّل لديه وعي واضح بالمتصوّرات المعبّر عنها بالامتداد المتواصل، أو التواصل»[3]. وتوكيد أنّ المتواصل هو «مجموعة أشياء بسيطة (نقاط في الزمان وفي المكان)»[4]. هو إسهام رئيسي ذلك أن لا اعتراض مشروعاً في ألاّ تكون للنقطة ـ وهذا واضح ـ خصائص قطعة من الفضاء إذ من الجائز فعلاً أن يكون «للكل خصائص ليست لأجزائه»، والأجزاء ههنا هي عناصر الفضاء، فيستبعد بولزانو عندئذ فكرة «التلاصق». لا يمكن أن توجد نقطتان تتلامسان مباشرة، لأنهما «من الأجزاء البسيطة التي ليس لها لا جهة يُمنى ولا جهة يُسرى»، فيستخلص من ذلك وجوب وجود

---

(1) Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Prag: [n. pb.], 1817).

(2) Bernard Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, ed. Prihonsky (Leipzig: Reclam, [n. d.]), and ([Leipzig: [n. pb.], 1920])).

(3) المصدر نفسه، الفقرة 38.

(4) المصدر نفسه.

لانهاية من النقاط بين أي نقطتين. ويقول «هذا لا يمكن التعرّف عليه إلا بالذهن» لأنه غير قابل للفهم حدسياً. لكن تصوّره من ناحية أخرى محدود بالاستعمال الجوهري لاعتبارات متريّة. لكل نقطة في متواصل في هذه المجموعة، على الأقل نقطة مجاورة، «مهما كان صغر المسافة التي نبتعد بها عنها»[5].

من الملائم أن نوضّح قبل كل شيء أن الفضاء عند بولزانو ليس بحقيقة جوهرية: «لا الفضاء ولا الوقت هما حقيقيان»[6]. هما تحديد للجوهر من دون ذلك سيبقى غير محدّد. لكن يمكن أن نفكّر في الفضاء من خلال متصوّرات: «من غير المستحيل أن نشتقّ مجموعة الحقائق الهندسية من متصوّرات بحتة»[7]. وبالنتيجة، التناقضات الظاهريّة في اللانهاية من النقاط في فضاء يجب أن تكون معقولة، من دون لجوء الذهن إلى حدس لحلّها. وإذا كان الزمان والفضاء يستعملان في الرياضيات، فهذا عائد لسبب وحيد هو أن هذه البنية المتصورية التحتيّة، التي لحظها بولزانو، ليست سوى ما سيتضح لاحقاً كنظرية المجموعات والطوبولوجيا المجموعاتيّة.

تتميّز مجموعة نقاط مقطع في مستقيم، كمتواصل، بلانهائية نقاطها، بين أي نقطتين كما قلنا، وبتراتبها في نفس الوقت، فيبدو إذاً وبعبارة حديثة، أن ما أبرزه بولزانو هو الكثافة في المتواصل. تعرّف هذه اللانهائية بكل دقّة بإمكانية إقامة مقابلة واحداً بواحد، بين نقاط المجموعة وبين نقاط أي جزء منها[8]. أما الترتيب، الذي هو

---

(5) المصدر نفسه.

(6) المصدر نفسه، الفقرة 17.

(7) انظر الفقرة 79 من: Bernard Bolzano, *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden* (Leipzig: F. Meiner, 1929-1931).

(8) انظر الفقرة 20 من: Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

علاقة مجرّدة بين أي نقطتين، والذي يعبّر الحدس عنه بخصائص تجريبية («قبل»، «بعد»، «إلى يمين»، «إلى يسار»...)، فهو بالنسبة إلى نقاط متواصل ليس «بالترتيب الجيد». هذا يعني أن المرور، على سبيل المثال، من الناقص (ـ) إلى الزائد (+) إذا اخترنا الأصل صفراً، يتم بلانهاية من القيم، من دون أن يكون بالإمكان تعيين آخر عنصر في العناصر السالبة، ولا أول عنصر في العناصر الموجبة[9]. بحيث إنه عند الاقتضاء، لا يمكننا أن نأخذ في الاعتبار «متسلسلات» طبيعية من العناصر في متواصل، (الكلمة الحديثة المستعملة هي «متتاليات»). ومع ذلك من الواضح أننا نستطيع اختيار مجموعة نقاط تؤلّف متتالية متزايدة محدودة. برهن بولزانو في *Rein analytischer Beweis*[10] على أن لمتتالية كهذه حدّاً أعلى من بين نقاط المستقيم[11]. ويفترض بصورة عامة أن شرط تقارب متتالية في متواصل (متري) هو الشرط المسمّى شرط كوشي، في التصاغر اللامتناهي للمسافة بين العناصر المتعاقبة[12]. صاغ بولزانو أيضاً تعريفاً صحيحاً لاستمرارية دالّة تعمل في فضاء متواصل متري، بصورة

---

(9) Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, préface IV.

(10) Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, [Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. no. 153] (Leipzig: Ostwald, 1905), Traduction Sebestik, in: *Revue d'histoire des sciences*, vol. XVII (1964), pp. 136-164.

(11) «إذا كانت خاصة M لا تنتمي إلى جميع قيم مقدار متغيّر، بل إلى جميع القيم الصغرى من قيمة ما U، عندها يوجد مقدار U هو الأكبر من بين القيم التي يمكن أن نؤكد بأنها القيم الوحيدة الصغرى التي تأخذ الخاصة M» (المصدر نفسه، الفقرة 12).

(12) المصدر نفسه، الفقرة 7.

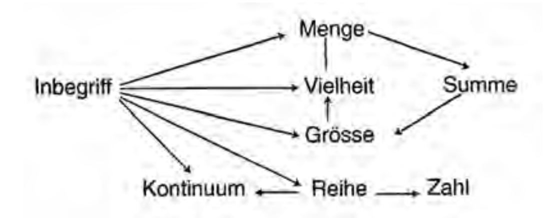
مستقلّة عن ضروب الحدس على الوقت والحركة: إذا كان المتغير «x يأخذ قيمة ما، فإن الفارق $f(x + \omega) - f(x)$ يمكن جعله أصغر من أي مقدار مُعيّن»[13] يتكهّن، لكنه يعترف بوجوب البرهنة، بأن دالّةً كهذه تأخذ جميع قيم المتواصل، الواقعة بين حدّيها.

نتبيّن من ناحية أخرى أن جميع هذه المفاهيم، المتعلّقة بالبنية الطوبولوجية لنقاط المستقيم، عرّفها بولزانو بواسطة شروط متريّة. هذه المحدودية في متصوّراته، من وجهة نظر طوبولوجيا مجموعيّة مستقبلية، ظهرت بوضوح عندما أدخل وأراد أن يعرّف مترياً متصوّر جوار نقطة ومتصوّر نقطة منعزلة، مفهومين طبيعتهما الطوبولوجية، غير المتريّة، هي أمر جوهري. يقول بولزانو إن نقطة تكون مجاورة لنقطة p، إذا كانت واقعة على دائرة مركزها p. ولكي لا تكون النقطة منعزلة يجب أن يكون عندها على الأقل نقطة مجاورة على أي دائرة من أي شعاع، مهما يكن صغيراً، فإذا ما وجدت في مجموعة نقاط على الأقل نقطة منعزلة، فإنّ المجموعة التي تحتوي هذه النقطة «لا تكون متواصلاً تاماً»[14]، فعلى سبيل المثال، إذا حذفنا من القطعة [0,1] جميع النقاط ذات الإحداثيات السينيّة 2^{-n} (أي $1/2^n$)، أصبحت تلك القطعة «غير متواصلة»، فإذاً، على ما يبدو، ما يميّز المتواصل المتري بصورة كاملة عند بولزانو ليس المفهوم الحديث للكثافة، لأن الكثافة تبقى قائمة في الحالة التي أعطاها كمثال عن عدم التواصل. ما يختفي عندئذ هو الترابط (والتراصّ). ومن هنا نرى أن هيمنة وجهة النظر المتريّة هي التي منعت بولزانو من أن يشرك بوضوح في التواصل مفهومين متمايزين، الكثافة والترابط.

(13) المصدر نفسه، تصدير 2.

(14) انظر الفقرة 38 من: Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

1.2 ـ ما من شك في أن بولزانو كان من أوائل الذين استشفُّوا، بأسلوب ثاقب، إمكانية اختزال التواصل الهندسي فى خصائص مجموعاتيّة. غير أن الولادة العسيرة لنظرية مجرّدة للمجموعات هي ظاهرة بشكل خاص في تعدّدية التصوّرات التي قدّمها لموضوع المجموعة نفسه، وفي البناء الذي طرحه لمتصوّرات المقدار والعدد انطلاقاً من هذا الموضوع المجرّد جداً. لنكتف بالإشارة إلى درجات ذلك كما نجدها في المفارقات[15]. كل مرحلة من هذه المراحل التصوّرية تعرّف بما تجعل من العمليات ممكناً على موضوعها. تتمّ تخصّصية مفهوم القاعدة في اتجاهين يقودان على التوالي إلى العدد وإلى التواصل:



السهام تمثل صلات متصورات، وأحياناً تبعية

رسم 2

1 ـ Inbegriff، أفضل ما تتطابق معه هذه الكلمة هو تصوّرنا العام لكلمة مجموعة، مع التشديد على فكرة الكليّة. تدلّ، كما يقول لنا بولزانو، «بمعناها المألوف»، على «الكائن مجموعة» من عناصر

---

(15) نجدها بترتيب مختلف في (Wissenschaftslehre): Inbegriff, Menge, Summe, Reihe, Vielheit, Grösse, Zahl.

لكننا نجدها جزئياً أيضاً في: Bernard Bolzano, *Grössenlehre 3. Vorkenntnisse*, in: *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, Hrsg. von Eduard Winter [u.a.] (Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann Holzboog, 1969-2004), Reihe II, Nachlass, A7.

يسمّيها أجزاء (Teile). التعريف الكامل لمجموعة أشياء (Dinge) في Wissenschaftslehre يصاغ هكذا:

«صلة أو اتحاد من هذه الأشياء، كائن مجمل من هذه الأشياء عينها، كل تدخل فيه كأجزاء»(16).

من الظاهر أنه يميّز بين العناصر والأجزاء(17) مع أنه لا يطرح كلمة مختصّة للدلالة على هذه الأخيرة، الكلمة Teil تستخدم للمفهومين من دون تمييز، مع ما يرافق ذلك من التباس. كل «جزء» يمكن أن يكون له «أجزاء»، ولكن من الواجب «أن لا يكون أيّ من الأجزاء (أو العناصر) نفسه جزءاً (أو عنصراً) من أحد الأجزاء الأخرى»(18) (*Grössenlehre*) بولزانو يميّز أيضاً اتّساع وإدراك مجموعة(19)، خاصّة في تدوين درجات تحديد الاتساع، بالمفاضلة بين المجموعة الواسعة المجهولة الاتساع تماماً، والمجموعة الضيّقة المحدّدة الاتساع تماماً. على سبيل المثال، المجموعة: «جذر المعادلة x^3-$3x^2$-x+3»، هي أوسع من المجموعة: «العدد 3».

من الواضح أن مختلف هذه الأوجه للمفهوم شاهد على التردّد في ما يتعلق بالطبيعة الصحيحة للمتصوّر المجرّد للمجموعة. لكن بولزانو سوف يوصّف أيضاً عدة أنواع منه.

2 ـ Menge، المترجمة اليوم «بمجموعة»، هي Inbegriff حيث

---

(16) انظر الفقرة 87 من: Bolzano, *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden.*

(17) انظر الفقرة 83 من: Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

(18) Bolzano, *Grössenlehre*, in: *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, Reihe II, Nachlass, A. Band 7, p. 101.

(19) انظر الفقرة 83 من: Bolzano, *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden.*

لا يؤخذ ترتيب العناصر في الاعتبار، ويصبح بالتالي غير مهمّ؛ لم يكن كذلك إذاً في متصوّر Inbegriff على العموم. إضافة إلى ذلك يلاحظ بولزانو أن العناصر (Teile) في عنصر (Teil) من Menge يمكن أن تكون أو لا تكون عناصر (Teile) في الكل[20]. وهذه ملاحظة لا تتوضّح إلا من خلال إدخال الجانب Summe.

3 ـ Vielheit، التعدّدية. إنها Menge حيث عناصرها هي وحدات من نوع معيّن[21]. الوحدة هي «خاصية شيء بفضلها يوجد تمثيل، تتّبعه هي كموضوع».

4 ـ Summe: هو Inbegriff (وحتى Menge) فيه لاتّحاد العناصر معنى[22]: عناصر العناصر هي هنا عناصر الكل، بفضل عملية الاتحاد التي هي هذا العبور إلى «أجزاء الأجزاء» (عناصر العناصر).

5 ـ Grösse: إنها تعددية بخصوصها أي عنصر A وأي عنصر B هما إما متساويان، وإما أحدهما يحتوي عنصراً يساوي الآخر[23]. بعض التعدديات يمكن أن تكون مقادير، إذا كانت لا تتغير بخصوص أي استبدال في وحدتها. والرياضيات هي في الجوهر نظرية المقادير، «علم تكون فيه القضايا الأساسية والأكثر أهمية ـ ولا جزء منها فقط ـ هي تحديدات مقادير»[24]، ولا تكون فيه المقادير أداة معرفة فقط.

---

(20) المصدر نفسه، الفقرة 84.

(21) انظر الفقرة 4 من: Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

(22) المصدر نفسه، الفقرة 5.

(23) المصدر نفسه، الفقرة 6، و: Bolzano, *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden.*

(24) انظر الفقرة 2 من: Bolzano, *Grössenlehre*, in: *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, p. 26.

6 ـ Reihe : المتتالية (ويقال اليوم: Folge)، حيث كل حدّ يتحدّد بمقابلة واحد لواحد من خلال آخر، سلفه أو خلفه، وفق قانون، هو نفسه في كل Inbegriff. ويعترف بولزانو بأن علاقة الترتيب هذه هي مجرّدة، لكنه لا يوضح خصائصها التصوريّة.

7 ـ Zahl[25]. العدد هو متتالية حدّها الأول هو وحدة وحدودها التالية هي تعدديّات، نحصل عليها بأن نجمع إليها على التوالي وحدة من نفس النوع. الحدود هي إذاً تعدديّات، ما عدا الحدّ الأصلي. بولزانو لا يفصل بين العدد عديد وبين العدد رتيب.

8 ـ يُعرّف التواصل الهندسي في النهاية، كما رأينا سابقاً، كمجموعة لامنتهية بدون نقاط منعزلة. والتعارض بين المنتهي واللامنتهي يتعلق أولاً بالتعدديات، التعددية اللامنتهية تحتوي كجزء، بالمعنى الحديث، كل تعددية متناهية، التي هي حدّ في متتالية، فنرى أنّ اللانهائي (أو اللامنتهي) لدى بولزانو وهو الذي سبق ديديكند وكانتور قابل للعدّ، وهو يطبّق تعريف التعددية اللامنتهية هذا على التواصل الهندسي[26]، ويعترف بالتميّز بين قوّة، مجموعة من النقاط وقياس القطعة التي تتضمّنها، لكنه يقدّم هذا التمييز كمفارقة[27].

هذا الإعداد المعقّد لمفهوم Inbegriff يدلّ بوضوح على الصعوبات المصادفة في اختزال المفهوم الهندسي للتواصل، الغامض تصوّره في بنية مجرّدة محكمة، قائمة على متصوّر أولي لمجموعة من نقاط. لم يتوصّل بولزانو إلى إدارة هذا المشروع على نحو تام،

---

(25) Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, parag. 87, and *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden*, parag. 87.

(26) انظر الفقرة 20 من: Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen.*

(27) المصدر نفسه، الفقرة 40.

ولم ينشئ من هذا المنظار طوبولوجية مجموعيّة حقيقية. عائقان رئيسيّان وقفا حجر عثرة أمامه، هما من ناحية، تعلّقه بفكرة متريّة التواصل، التي تربطه بالبنية العددية في R، مع أنه لم يكن لديه تعريف صحيح وواضح بما يكفي لمجموعة الأعداد الحقيقية[28]. ومن ناحية أخرى الالتباس الذي تركه برغم كل شيء قائم بين العلاقة «هو عنصر» والعلاقة «هو جزء». غير أنّ ما قام به بولزانو من عمل هام لم يعرف إلاّ قليلا في زمانه، جعل منه أحد المؤسسين الأوائل للطوبولوجيا الحديثة.

2 ـ منظومة المتصوّرات الطوبولوجية المجموعية

2.1 ـ كان مشروع الطوبولوجيا المجموعية في الأصل لتلاقي الحدس الفضائي وتجاوزه. وكما من دون ج. هادمار، في شاهدة كتاب فريشيه[29] التأسيسي، بخصوص مفهوم للتواصل الموسّع إلى «الفضاء» المكوّن من مجموعات ليست من نقاط بل من دوال قائلاً إنّ المعنى الجديد للمتواصل:

«لا يمنح فكرنا أيّ صورة بسيطة والحدس الهندسي لا يعرّفنا مسبقاً أي شيء بخصوصه».

لكن تحليل مفهوم التواصل في متصوّرات مجرّدة وبناء كانتور سلّم لانهايات، معاصرة تقريباً، ساهما في نفس الوقت في تبرير

(28) بولزانو ترك بذلك عملاً حول الأعداد الحقيقية، نشر بعد موته في. انظر: Rychlik, «La Théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume de Bolzano,» *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, nos. 3-4 (1961).

(29) Maurice Fréchet, *Les Espaces abstraits* (Paris: [s. n.], 1926).

منذ العام 1906، وسّع فريشيه في منشوره فكرة التقارب في فضاءات الدالات: Maurice Fréchet, «Sur Quelques points du calcul fonctionnel,» *Rend. di Palermo*, t. XXII (1906), p. 174.

اختيار مجموعة الأعداد الحقيقية كطراز أوّلي للتواصل، وفي التخلّي عن هذا النموذج العددي[30]. وهو تبرير، من حيث إن أعمال ديديكند وكانتور تبرز وتصوغ بوضوح خصائص مجموعات مواضيع عددية تميّز الاستمرارية (التواصل). لكنّه أيضاً فصل لهذا النموذج الحسابي، الذي يُسقط على التواصل الفضائي مفهوم المسافة[31]، وحتى فكرة قابليّة العدّ، لغاية ثانية إن جاز القول، بواسطة مفهوم المتتالية. ومع ذلك توسّع سياق تجريد التواصل العددي إلى سياق نزع الفضأنة بالذات عن التواصل الهندسي، الذي استشفّه بولزانو كما قلنا، وبدأه كانتور وديديكند، وبيّنه هاوسدورف في نظريّة موحّدة مصاغة بعبارات تبديهية[32]. نزع الفضأنة هنا يعني التخلّي عن الخصائص الحدسيّة في تناول الفضائية، لا لغوياً فقط بل في تعريف المتصوّرات وسير الاستدلال. على أنّ هذه الطوبولوجية المجموعية مهما يكن من أمر تظهر في الأصل كتشكّل تصوّري لفكر فضائي. إلا أن هاتين المناسبتين اللتين تمّ فيهما تجاوز مفهوم المسافة ومفهوم قابلية العد، هما ما سوف نختارهما مبحثاً، لأنهما يعبّران بقوّة، وفرضاً إن جاز القول، عن التوجّه نحو ما هو جوهري في نسيج الفضاء.

---

(30) بخصوص نبذة تاريخية مفصّلة ومدروسة حول الطوبولوجيا العامّة، انظر المدوّنات التاريخية لبورباكي، في الفصل الأول والثاني من: Nicolas Bourbaki, *Topologie générale* (Paris: Hermann, 1940-1949), et A. Schonflies, *Entwicklunger Mengenlehre und ihrer Anwendungen* (Berlin: [n. pb.], 1932).

(31) المسافة على مجموعة تقرن بكل زوج من النقاط عدداً صحيحاً حيث:

1. $d(x, y) \geqslant 0,\ d(x, x) = 0;\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

(32) Felix Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre* (New York: Chelsea Publishing Company, 1914).

2.2 ـ إنّ المتصوّرات المجموعية المبدّهة للمفتوحات والجوارات هي التي أسّست لهذا التخلّي عن اللجوء إلى المسافات، في مثل ما كان يلعبه ذلك اللجوء من دور عند بولزانو على سبيل المثال. الفكرة الراسمة عند هاوسدورف كما عند فريشيه، هي فكرة نقاط تراكم متتالية من نقاط، كنقاط «جوار» كلّ منها يحتوي على الأقل نقطة أخرى، وبالتالي ما لانهاية من النقاط، فيجب إذاً أن نعطي معنى عمليّاتيّاً غير متري لمفهوم الجوار. هذا ما فعله هاوسدورف بإدخاله تعريفاً مبدّهاً لمجموعة جوارات نقطة ولمجموعة مفتوحات فضاء، نجده مكوّناً هكذا «كفضاء طوبولوجي»[33]. الترجمة المتريّة لهذه المفاهيم هي طبعاً قريبة جداً من الحدس. والمتصوّر الأساسي هو الكرة المفتوحة B (a, r)، كمجموعة النقاط x الواقعة على مسافة a من نقطة ثابتة مسافة أصغر من عدد حقيقي موجب r. مفهوم المجموعة المفتوحة على أنها اتحاد كرات مفتوحة واضح لا يستدعي التفكير، ونبيّن بأن لمجموع

(33) لنسترجع بديهيات المفتوحات:

1- كل اتحاد مفتوحات هو مفتوحة

2- كل تقاطع مفتوحات متناه هو مفتوحة

نطلق اسم قاعدة طوبولوجية على فصيلة من المفتوحات حيث كل مفتوحة هي اتحاد مجموعات في القاعدة. أو، بصورة متكافئة: بخصوص أي نقطة في مفتوحة يوجد مفتوحة في القاعدة تتضمن هذه النقطة، وتحتويها هذه المفتوحة. جوار جزء في E هو كل مجموعة تحتوي هذا الجزء بحيث:

مباده مجموعة الجوارات V(x) للنقطة x:

1- النقطة x تنتمي إلى كل V(x)

2- كل جزء في الفضاء يحتوي جواراً V(x) هو V(x)

3- كل تقاطع جوارات متناه V(x) هو V(x)

4- إذا كانت المجموعة V جواراً V(x) فهناك مجموعة W هي V(x) وهي أيضاً V(y) بخصوص أي نقطة Y في W.

نبيّن أن نفس الطوبولوجية يمكن أن تعرّف بواسطة منظومة من المفتوحات أو منظومة من الجوارات.

الكرات المفتوحة الخصائص الصورية لقاعدة طوبولوجية. ولجميع المتصوّرات المعرّفة انطلاقاً من مباده المفتوحات أو الجوارات إذاً تفسير متريّ واضح، يسمح بالانتقال من دون أي معضلة من متريّة معرّفة بواسطة مسافة، إلى الطوبولوجية التي تحملها. بالمقابل يسمح التنظيم المجرّد لمجموعة من النقاط E من خلال المباده الطوبولوجية بأن نعرّف بأحكام المفاهيم التي سبق إدخالها من خلال اعتبارات متريّة؛ فنذكر استمراريّة الدالّة على سبيل المثال: ببساطة تكون الدالّة مستمرّة (متواصلة) إذا كانت تطبّق فضاء طوبولوجيّاً E، على فضاء طوبولوجي E'، بحيث إن كلّ صورة مفتوحة في E' هي صورة مفتوحة في E. أو بأسلوب متكافئ أيضاً، محلّيته، وأقرب إلى الحدس المتري: تكون الدالّة مستمرة في نقطة x_0 في E إذا وجد ـ مهما كان جوار V′ المتعلقة بـ $f(x_0)$، في E′ ـ جوار V، للنقطة x_0 في E بحيث يقتضي تواجد النقطة x في V تواجد f(x) في V′.

يستكمل التخلّي عن المفاهيم المتريّة بتعريف طوبولوجي لنقاط النهايات المتتالية المتقاربة، ولنقاط تراكم مجموعة من النقاط: كل جوار لمثل هذه النقاط يحتوي على الأقل نقطة من المتتالية أو من المجموعة. وبصورة أعم، نقول إن نقطة ما هي نقطة انتساب لمجموعة إذا كان كل جوار لهذه النقطة يقطع هذه المجموعة. تتشكّل منتسبة مجموعة إذاً من هذه المجموعة نفسها ومن نقاط التراكم. وتستكمل أيضاً بإدخال مفهوم يحلّ محل المفهوم المتري لمجموعة محدودة، أو بالأحرى يعطيه معنى مزدوجاً طوبولوجيّاً بحتاً. المعنى الأول يشتقّ من مبرهنة هاين ـ بوريل التي تحمل في الأصل على المقاطع المستقيمة (أو الفترات) المغلقة المحدودة، في مجموعة الأعداد الحقيقية: جزء A في فضاء طوبولوجي يكون مدمجاً[34] إذا كان كل غطاء للجزء A من

(34) بورباكي يقول شبه مدمّج، ويضيف شرط الفصل بخصوص التدمّج.

مجموعات مفتوحة يحتوي غطاء من عدد متناه من المفتوحات. والمعنى الثاني يُبرز بدقّة الخصوصيات التي هي استتباعات لإدخال المسافة في فضاء طوبولوجي. وبالفعل، في فضاء متري (كمجموعة المستقيم العددي R) يتكافأ التدمّج المعرّف سابقاً مع الوجود في كل متتالية من النقاط لمتتالية جزئية متقاربة، وهي خاصّية تدعى «التدمّج المتتالي»، الذي يمكن أن يؤخذ إذاً، في فضاء متري، كتعريف للتدمج والتدمّج في الفضاء المتري يتكافأ أيضاً مع الخاصّية المسمّاة بخاصّية بولزانو فايرستريس[35]. لكن النتيجة ليست هي نفسها في فضاء طوبولوجي من دون متريّة، ونستطيع أن نبرهن على أن التدمّج (أو التدمّج المتتالي) يقود إلى خاصّية بولزانو فايرستريس، ولكن العكس غير وارد. وهكذا يمحو ـ تقريباً ـ إدخال متريّة على فضاء طوبولوجي، تميّزات طوبولوجيّة جوهريّة، بإضافة خصائص جديدة.

2.3 ـ بالمقابل، يقود تحييد مفهوم المسافة أيضاً إلى تهذيب مفاهيم حدسيّة أخرى وتفكيكها، كمفهوم الترابط، حيث معناه الضبابيّ هو معنى المرور المتواصل ومن دون فجوات من نقطة إلى أخرى في الفضاء. من وجهة نظر الطوبولوجيا المجموعية نعرّف ترابط الفضاء كاستحالة تفكيكه إلى جزأين مفتوحين منفصلين. ومفهوم فصل النقاط نفسه في فضاء يمكن أن يفكّك إلى عدة مراتب، تتوافق على نحو ما، مع درجة ثرائه بالمفتوحات. تفترض بديهية فصل أولى أنه، بخصوص كل زوج من النقاط، تقع كل نقطة في مفتوحة لا تحتوي النقطة الأخرى، ولكن من الممكن أن لا تكون المفتوحتان منفصلتين. البديهية التي طرحها هاوسدورف بديهيّة فصل بامتياز، تقول بأن نقطتين متمايزتين تقعان في مفتوحتين

(35) لكل مجموعة جزئية غير متناهية نقطة تراكم على الأقلّ.

منفصلتين. وفي فضاء كهذا، على سبيل المثال، للمتتالية المتقاربة حدّ وحيد. تعريف ثالث للفصل هو تعريف الانتظام: إذا كانت نقطة خارج مجموعة مغلقة، فهناك مجموعة مفتوحة تحتوي تلك النقطة ومفتوحة تحتوي المغلقة، وهاتان المفتوحتان منفصلتان. وفي النهاية، في فضاء ينعت بالطبيعي، يوجد بخصوص كل زوج من المغلقات المنفصلة مفتوحتان منفصلتان تحتويان على التوالي الأولى أو الثانية. مثل هذه التميّزات تُظهر إذاً متصوّرات جديدة تتعلّق بتركيبة فضائيّة مختزلة في بنية مجموعة من نقاط. يمكن أن تجعلنا إذاً الأهمية المعطاة للمصطلحات نعتقد بأنها نتاج إعداد مدرسي، وأندريه فايل ينتقد «سمة التشوش الكامل للمفاهيم والبديهيات» المدخلة في الأصل، ويبيّن بأن الوحيدة «النافعة» حقاً هي بديهيات المفتوحات، أو الجوارات، في تعريف الفضاء الطوبولوجي[36].

على أن هذه المفاهيم غالباً ما كان ظهورها في مسائل تقنيّة فرضت على الرياضي أثناء القيام بعمله، أدوات جديدة للتفكير في فضاء يتحرّك في هذا الكون من التجريد الطوبولوجي.

2.4 ـ رأينا مراراً عديدة في تعريف المتصوّرات الطوبولوجيّة كلمة متتالية من نقاط. بالمعنى الدقيق، المتتالية هي تطبيق يعمل من مجموعة الأعداد الطبيعية N نحو مجموعة نقاط الفضاء. ولانهائية الحدود التي يمكن أن تظهر هي إذاً لانهاية تقبل العدّ. لكن هذا المفهوم الحسابي لقابليّة العدّ لا يبدو أنه ينتمي طبيعياً وضرورياً إلى المتصوّرات الطوبولوجية. أندريه فايل يخصّه في الصفحات الأولى

(36) André Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, publications de l'institut mathématique de l'université de Strasbourg, 1. Actualités scientifiques et industrielles; 551 (Paris: Hermann, 1938).

من كتيّبه، الذي ابتكر فيه الأفضية المنتظمة[37]. بنقد قويّ لاذع حلو المذاق، في معرض فرضيّة قابليّة العدّ التي سنتحدّث عنها قريباً:

«طفيلي مؤذ، يغزو كثيراً من الكتب والأطروحات، بحيث يضعف مداها، ملحقاً الضرر بالفهم الواضح للظواهر. إنّ من واجب ضمير الرياضي فعلاً ـ إن كان له ضمير ـ لا أن يثنيه فقط عن إدخال فرضيّة لا طائل منها وغريبة عن الموضوع الذي هو بصدده، بل إن ما نلاحظه أكثر فأكثر هو أن الأفضية التي تتميّز بعدم قابليّة العدّ غالباً ما يمكن أن تقدّم وسائل تقنية قيّمة».

ويستخلص:

«من الطبيعي، عندما نتخلّى عن قابليّة العدّ، أن لا تنتفي شرعيّة جعل متصوّرات المتتالية والحدّ أداة جوهرية، ومن الواجب أن نستبدلها بأدوات أخرى، يكون حقل عملها أكثر اتساعاً».

هذه الأداة الجديدة هي متصوّر المرشح وتقارب المرشح، الذي أدخله هنري كارتان[38] في السنة نفسها. المرشح هو مجموعة من أجزاء فضاء طوبولوجي، بحيث إن:

1 ـ كل جزء من الفضاء يتضمّن مجموعة في المرشح هو مجموعة في المرشح.

2 ـ كل تقاطع متناه من مجموعات في المرشح هو مجموعة في المرشح.

---

(37) المصدر نفسه، ص 3.

(38) «La Notion de filtre», C. R. de l'académie de sciences, 11 octobre et 3 novembre 1937.

3 ـ المجموعة الخاوية لا تنتمي إلى المرشح.

قاعدة مرشح هي فصيلة غير خاوية من أجزاء الفضاء حيث تقاطع أي مجموعتين في الفصيلة يتضمّن مجموعة في الفصيلة وهذه المجموعة لا تكون إطلاقاً خاوية. هذه القاعدة تولّد مرشحاً بمعنى أن كل مجموعة في القاعدة هي مجموعة في المرشح وأن كل مجموعة في المرشح تحتوي مجموعة في القاعدة. مثالان مبتذلان من المراشح هما مجموعة جوارات نقطة، ومجموعة تكملات الأجزاء المتناهية في مجموعة غير متناهية E. بصورة خاصّة إذا كانت E هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N، حصلنا على «مرشح فريشيه». يكون مرشح ما «أكثر دقّة» من آخر إذا كان يحتويه. المرشح الأقصى هو مرشح حيث لا يوجد أيّ مرشح آخر أكثر دقّة منه، بالمعنى الحصري للكلمة. لكن المثال الوحيد لمرشح أقصى الذي يمكن أن يبرز من دون استخدام مبده الاختيار هو المرشح المبتذل، لمجموعة أجزاء الفضاء التي تتضمن نقطة معيّنة.

من دون أن نأخذ في الاعتبار أي متتالية، وإذاً بعيداً عن أيّ استخدام لقابليّة العدّ[39]، يسمح متصوّر المرشح عندئذ بتعريف النقاط المنتهيات: مرشح يتقارب نحو نقطة منتهى إذا كان أدق من مرشح جوارات هذه النقطة. وبصورة أعمّ نعرّف نقاط التصاق مرشح على أنها نقاط التصاق لجميع مجموعات قاعدته. يمكن أن يُعبّر عن تعريف التدمّج كما يلي: يكون الفضاء مدمّجاً إذا كان فصلياً، ويتقارب فيه كل مرشّح أقصى. وهكذا يمكن أن نطبّق المتصوّرات

(39) لنشر إلى أننا نستطيع أن نقرن بمتتالية غير متناهية من النقاط مرشحاً خاصاً يطلق عليه بورباكي اسم مرشح بسيط، هو صورة مرشح فريشيه بالدالّة $n \to x_n$ العاملة من N في فضاء العناصر X. هذا المرشح عنده قاعدة تقبل العد، تتشكّل من المجموعات S_n للنقاط x_p حيث $p \geqslant n$.

الطوبولوجية المتأتّية من أفضية نقاط حدسيّة، مع متتالياتها، على «أفضية» جدّ غريبة، كأفضية الدوال، أو عامّة جداً كالزمر الطوبولوجية(40)، التي برّرت فعلاً إدخال أدوات جديدة. بذلك استطاع هاوسدورف أن يكتب، متحدثاً عن الطوبولوجيا المجموعية:

«لا يتعلّق الأمر فقط بإعادة صياغة النظرية المتريّة، بل كذلك بتصوّرية جديدة وأوسع للفضاء: الأفضية التي تقبل المتريّة، أي المتشاكلة مع الأفضية المتريّة، تبدو لي حالة خاصّة من الأفضية الطوبولوجيّة»(41).

2.5 ـ بهدف التخلّي عن الفرضيات المتريّة وعن قابليّة العدّ وُضع متصوّر الفضاء المنتظم الذي ابتكره أندريه فايل. لوحظ في التحليل أن التقارب البسيط لمتسلسلة من الدّالات المستمرة f_n، لا يكفي لضمان استمرارية منتهاها. كان من الواجب أن يكون التقارب أكثر صرامة، بالمعنى الآتي: الحد الأعلى للفارق بين قيمة عنصر غير معين f_n وبين قيمة المنتهى f يتقارب نحو الصفر. الاستمرارية المنتظمة لدالة f معرّفة على فضاء متري وآخذة قيمها في فضاء متري تعني:

$$\forall x\, \forall y\, \forall \varepsilon\;\; \exists \eta |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

بكلام آخر، تغيّر الدالّة يمكن جعله صغيراً بقدر ما يُراد، بصورة مستقلّة عن نقطة تطبيقها؟ هذه الخاصّة تحقّقها أيّ دالّة مستمرّة معرّفة على فضاء متري مدمّج تأخذ قيمها في فضاء متري. مشروع أندريه فايل في كتيّبه الصادر سنة 1937 كان لصياغة تعريف غير متري، يمكن تطبيقه سواء بسواء على الأفضية المتريّة وعلى

---

(40) المجموعات المزوّدة ببنية زمرة G وطوبولوجيّة بحيث إن الدالّة $(x, y) \rightarrow xy$ من GxG في G والدالّة $x \rightarrow x^{-1}$ من G في G هما مستمرتان بخصوص هذه الطوبولوجيّة. يلاحظ فايل أن كل زمرة طوبولوجية يمكن أن تؤخذ في الاعتبار كفضاء منتظم، انظر: Weil, Ibid., p. 10.

(41) Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, p. 227.

الأفضية الطوبولوجية معطياً بالاستنتاج معنى عاماً للمقارنة بين جوارين لنقطتين غير محدّدتين ـ جوار للنقطة x وجوار للنقطة f(x) ـ في فضاء. ندخل إذاً، في مجموعة الضرب E x E فصيلة من أجزاء U تسمّى محيطات. إذا كان الزوج (x, y) يقع في محيط V نقول بأن النقطة x والنقطة y هما متقاربتان برتبة V. المحيطات تستوفي مباده المرشح والمباده الثلاثة الآتية:

1 ـ كل محيط يحتوي الوتر (x, x).

2 ـ إذا كان الزوج (x, y) في محيط V، يكون الزوج (y, x) أيضاً في محيط 'V، ليس بالضرورة هو نفسه.

3 ـ بخصوص أي محيط V يوجد محيط W حيث $WoW \subset V$، أي إنه إذا كان الزوج (x, z) والزوج (z, y) جاري رتبة W يكون الزوج «الضرب» (x, y) جار رتبة يتضمّنها V.

تشكّل المحيطات إذاً مرشحاً على الفضاء المضاعف E x E، ونبيّن أنه، على فضاء E مزوّد ببنية انتظام، يوجد طوبولوجية وحيدة حيث بخصوص أي نقطة x، مجموعة الأجزاء V(x) في E هي بخصوص هذه الطوبولوجية مرشح جوارات x وذلك حيث تجوب V مجموعة المحيطات للبنية المنتظمة[42].

يسمح هذا البناء الجديد على سبيل المثال بأن نعرّف، بصورة مستقلّة عن المسافات، مفهوم مرشح كوشي معمّمين على الأفضية غير المتريّة متصور متتالية كوشي[43]. نقول إن الجزء A في E هو

---

(42) Bourbaki, *Topologie générale*, II, 2.1.

(43) لنذكر أن متتالية في فضاء متري تستوفي شرط كوشي، هي متتالية x_n حيث:

$\exists n \forall \varepsilon \forall p, q > n \left| x_p - x_q \right| < \varepsilon$

«صغير بمقدار V» إذا كان كل زوج من نقاط A يتقارب بمقدار V. المرشح على فضاء منتظم يكون مرشح كوشي إذا كان بخصوص أي محيط V يوجد مجموعة صغيرة بمقدار V تقع في المرشح. وبصورة مشابهة لحالة الأفضية المتريّة كل مرشح متقارب على فضاء منتظم هو مرشح كوشي.

وهكذا يبرز متصوّر الفضاء المنتظم كبنية شبه متريّة حيث تظهر بعض خصائص نسيج الأفضية المتريّة في شكل أعمّ، لأنها تعرّف من دون لجوء إلى إدخال المسافة.

«هي بنية أضعف من البنية المتريّة، لكنها أقوى من البنية الطوبولوجية»[44]. وعندئذ نبيّن أنّ الشرط اللازم والكافي كي تحصل متريّة الفضاء المنتظم مرتبط بإضافة خاصّية قابليّة العدّ لقاعدة فصيلة محيطاته[45]. وبصورة مستقلّة عن المرور بالأفضية المنتظمة، كان أوريشون قد برهن في العام 1924 على أن الشرط اللازم لكي تقبل طوبولوجيّة المتريّة هو أن تكون فصلية، وأن تستوفي قاعدتها مبده قابليّة العدّ، فالخاصّية التي عابها أ. فايل كفرضيّة لا فائدة منها فائض في الطوبولوجيا هي في النهاية إذاً لازمة لقابليّة المتريّة. وبصورة أعم، مسألة قابليّة المتريّة لفضاء طوبولوجي تبيّن إذاً أحد الاتجاهات التي من خلالها يقوم التجريد الطوبولوجي بتشريح تركيبة الفضائية «الطبيعية» وإعادة تركيبها. في هذا يظهر، الفضاء والعدد في هذه التركيبة كمتلازمين جوهرياً. والتحليل التصوّري القائم على التبديهياتية يفكّكهما. لكنه يجعل بالإمكان، في اتجاه مضادّ، إعادة تركيبهما، بتسليط الضوء على الشروط المنطقيّة لترابطهما. هذه هي الحركة

---

(44) Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, p. 3.

(45) المصدر نفسه.

المزدوجة في العمل على روضنة الفكر الفضائي.

3 ـ المساخة

3.1 ـ كنّا منذ حين بصدد الرجوع إلى متصوّرات فضائيّة «طبيعية» من حيث إن التجريد الطوبولوجي، يفكك فيها بالمقابل خصائص مستقلّة منطقياً، مع إعادة تركيبها وتبرير ذلك. ومع ذلك تظهر مثل تلك السياقات عرضياً بناءات جديدة تتبيّن، بالنظر إلى تشكيلاتها الطبيعية، على أنها انحرافات، برغم أنها ممكنة منطقياً ومن دون شائبة. هذه المساخة لتصوّرات الفضاء هي تثقيفيّة حقاً في ما تخرجه من ذاك الذي نسمّيه، لعدم وجود كلمة أفضل، طبيعية بعض الترابطات لمتصوّرات مجرّدة مفكّكة من خلال تنظيم طوبولوجي ومتري أساسي للفضائية. وننهي إذاً هذا الفصل بتقديم موجز لبعض أمثلة «مخيفة».

3.2 ـ ذكّرنا أعلاه التشكيل التبديهي لمفهوم المسافة[46]. والحال أننا نستطيع أن نبني، من دون تناقض، متريّات فيها نعدّل البديهية المسمّاة بديهيّة المثلّث على هذا النحو:

$d(x, y) \leqslant \max \{(d(x, z), d(y, z)\}$، حيث الشطر الثاني في هذه المتراجحة هو العدد الأكبر بين العدد $d(x, z)$ والعدد $d(y, z)$. المسافة «الفائقة المتريّة» التي ندخلها على هذا النحو تظهر على سبيل المثال في البنية البائية التي يمكن أن نزوّد بها مجموعة الأعداد النسبيّة [47] وفي

---

(46) انظر الهامش 33 من هذا الفصل.

(47) بخصوص عدد أولي p نطلق اسم تقييم n على العدد $v_p(n)$ الذي هو أس p في تفكيك n إلى عوامل أولية. المسافة $d(n, m)$ بين عددين صحيحين هو العدد $p^{-v(n-m)}$ بخصوص $n \neq m$ وهو صفر بخصوص $n = m$. إنها تستوفي المبدهين الأولين للمسافة، لكنها تستوفي أيضاً مبده المتريّة الفائقة من دون مبيده المثلّث فقط.

فضاء مزوّد بمتريّة على هذا النحو لنأخذ في الاعتبار البولات المفتوحة $B(a,r)$، مجموعة النقاط التي مسافتها عن النقطة الثابتة a هي أصغر من z. نلاحظ عندئذ ظاهرتين مساخيتين.

1) كل بولة $B(x, r)$ تتساوى مع البولة $B(a, r)$ إذا كان المركز x نقطة ما داخل $B(a, r)$. وفعلاً يمكن أن نرى أن المسافات الفائقة المتريّة من a ومن x إلى سطح البولة y هي متساوية:

$$d(a, y) = r$$

$d(a, x) = r' < r$، لأن x هي داخل البولة $B(a, r)$

$d(y, x) = \text{Max}(r, r') = r$.

2) إذا كان لبولتين نقطة مشتركة، عندها تكون إحداها تحتوي الأخرى بالفعل، نفترض أن x نقطة مشتركة في البولة $B(a, r)$ وفي البولة $B(b, r')$. على سبيل المثال، إذا $r' < r$ يكون لدينا $d(a, b) \leqslant \max\{d(a, x), d(b, x)\} \leqslant \max(r, r')\ r$ البولة $B(a, r)$ تحتوي إذاً البولة $B(b, r')$.

ترتبط المساخة هنا بالتخلّي عن خاصّة للمسافة المألوفة لصالح خاصّة مختلفة، مختارة اعتباطيّاً، فالخاصّة المصاغة بصورة مجرّدة في مبده المثلّث، خلافاً لذلك هي إذاً مقترنة بالخصائص الأخرى للمسافة لتكوين متصوّر «طبيعي». ومن الواضح أن الحرّية الرياضية بالذات، شريطة عدم التناقض، هي التي تجيز هذا التجاوز، وتنتج كائنات جديدة، عرضياً «مخيفة».

3.3 ـ مثال آخر تقليدي للمساخة تقدّمه مجموعة كانتور التثليثيّة. قبل كل شيء نسوق ملاحظتين. في المقام الأول، لنلاحظ مرّة أخرى عمق وحدة الرياضيات التي يمكن أن ينسينا إياها التخصّص الحديث

للرياضيين. ذلك أنّ كانتور كان قد دفع إلى إنشاء هذا الموضوع، الهامّ من وجهة النظر الطوبولوجيّة والمتريّة، لكي يحلّ مسألة في التحليل: ما هي أجزاء المستقيم العددي بحيث إن متسلسلة مثلثاتيّة تتقارب نحو الصفر على تكملات تلك الأجزاء، تكون جميع معاملاتها مساوية للصفر. وفي المقام الثاني، نرى أن المواضيع والنظريّات الأكثر تجرّداً كان ظهورها في معرض مسألة خاصّة صادفها الرّياضيّون في مجرى عملهم الملموس.

نبني مجموعة كانتور التثليثيّة كما يأتي: نأخذ في الاعتبار المقطع [0,1] من المستقيم العددي، حيث يسلّم كانتور بأن جميع النقاط يمكن أن يشار إليها من خلال الأعداد الحقيقيّة بين الصفر والواحد. نحذف منها الثلث الوسطي، من دون طرفَيْه، ومن ثم الثلث الوسطي للمقطعين الباقيين، ومن ثم الثلث الوسطي للمقاطع الأربعة الباقية... وبمتابعة هذه الحذوفات إلى ما لانهاية، ما يبقى في النهاية من المقطع [0,1] هو مجموعة كانتور، حيث بعض خصائصها المفارقة هي الآتية.

أولاً، يبدو أن هذه المجموعة المثقوبة على نحو لانهائي ستكون في النهاية مجموعة خاوية. يمكن أن نبيّن على العكس تماماً بأن لها قوّة المتواصل، وأنّ في الإمكان وضعها في تقابل واحداً لواحد مع كامل المقطع الأصلي [0,1] التي استخرجت منه.

0 0,01 0,02 0,1 0,2 0,21 0,22

0 1/3 2/3 1

رسم 2

بالفعل، لنقم بتمثيل إحداثيات النقاط السينيّة من خلال

التفكيكات التثليثيّة[48] (أو الثالوثيّة). جميع نقاط القطعة [0,1] ستتمثل بجميع الكسور الثالوثية من أطوال غير متناهية على نحو: $0, a_1a_2, a_3....$ حيث كلّ عدد a_i هو إما العدد صفر وإما الواحد وإما الاثنان. بحذف الأثلاث الوسطية نزيل الكسور التثليثية التي تتضمن الواحد. وحتى لا نزيل الكسور العائدة للأطراف اليسارية، التي تشكل جزءاً من المجموعة، والتي ينتهي تمثيلها على نحو ...0100... نكتبها على نحو مكافئ ...2...0022...، نقاط المقاطع الباقية، ستكون في النهاية جميع الكسور التي يتضمّن تمثيلها الصفر والاثنين فقط. لمجموعة هذه الكسور إذاً قوّة مجموعة التطبيقات المسلطة على موضوعين هما 0 و2 في المجموعة غير المتناهية القابلة العدّ، للمواقع بعد الفاصلة. لكن هذه المجموعة a 2 ₀ هي من قوّة مجموعة الأعدّاد الحقيقيّة في أي قطعة مستقيم، أي قوّة المتواصل. الحذف اللامتناهي لقطع من القطعة الأصلية لم يبدّل شيئاً في قوّة مجموعة نقاطه.

ثانياً، مجموعة كانتور تحتويها قطعة، هي مجموع القطع الباقية بعد الحذف اللامتناهي. ولكن، بعد الحذف الأول طول المقطعين الباقيين هو 2/3، وهو 4/9 بعد الحذف الثاني، وهو $(2/3)^n$ بعد الحذف المرقم m، حيث منتهاه هو الصفر عندما تؤول m نحو اللانهاية. هذا المتواصل الخطّي، الذي يتضمّن لانهاية من نقاط أكثر ممّا يقبل العدّ، تحمله إذاً قطعة طولها صفر. . .

ثالثاً، هذه المجموعة من النقاط هي مغلقة، كتقاطع لامتناه من المقاطع الباقية التي هي مغلقة. ومن الواضح أنها مدمّجة كجزء

---

(48) التمثيل الثلثي يأخذ كوحدات متعاقبة $(1/3)^n$.$1/3, (1/3)^2$، يعود إلى الأماكن المتعاقبة على يمين الفاصلة، بدل قوى الكسر 1/10 في التمثيل العشري.

محدود مغلق في R. جميع نقاطها هي نقاط تراكم، لأن المقاطع الباقية المتتالية تحدّد جوارات لنقاطها الداخليّة غير الخاوية أبداً. نقول إن مجموعة كهذه هي مجموعة كاملة.

رابعاً، وفي النهاية، هذه المجموعة هي مع ذلك متقطّعة كلياً، أي إنه بخصوص أي نقطتين من نقاطها، يمكن تفكيكها إلى جزءين مفتوحين منفصلين يحوي كل واحد منهما إحدى هاتين النقطتين. بحيث إن أكبر جزء مترابط يحتوي نقطة ما يختزل في هذه النقطة لوحدها، فينجم عن ذلك أنّ مجموعة كانتور لا تحتوي أي مقطع مستقيم من R.

3.4 ـ هذا الموضوع يبدو لنا ممسوخاً، مقارنة بالأفضية المألوفة. لماذا؟ لأن الخصائص، أو بالأحرى أنواع الخصائص الجديدة التي تظهر فيه، تختلف، وأن تكن أحياناً تحمل نفس الأسماء، عن خصائص المواضيع المألوفة، المتأتّية من التجريد الأولي لحدسنا.

قبل كل شيء، مفهوم قوّة مجموعة من نقاط، التي كنا قد رأينا أن كانتور أبرزها، يبدو أولاً أنه يتعارض مع المتصوّر الطبيعي لـ «بعديّة» الفضاء، الذي سوف نتفحّص قريباً إعداده. أن تكون مجموعة كانتور من نفس قوّة جميع نقاط القطعة [0,1] فهذه عبارة لا تحمل نفس معنى العبارة: «لها نفس عدد النقاط» التي نماهيها معها عفوياً، وبحق لو كانتا من المجموعات المتناهية. مفهوم جديد بالكامل، له معنى في نظريّة المجموعات من النقاط، وبالأخصّ في المجموعات غير المتناهية (المنتهية)، يحدّد هذا الموضوع المجرّد، مفصولاً عن فضائيّة تركيبيّة وبهذا المعنى «طبيعيّة». في حالة لفضاء كانتور الثالوثي، ترتكز المفارقة، أو إذا أردنا الغلطة، أيضاً على البعديّتين وعدم استمراريّة وضعهما في التقابل: إن للمقطع [0,1] من

الخطّ المستقيم بعديّة واحد، لكن بعديّة فضاء كانتور صفر، ووضعهما في تقابل واحدا لواحد ليس مستمرّاً.

وكذلك الأمر بالنسبة لطول جوهر هذا الفضاء. والمفهوم الجديد هنا هو مفهوم قياس مجموعة بحيث إن طول مقطع مستقيم ليس سوى حالة خاصة، فالمجموعة التثليثية هي من قياس صفر، عبارة سوف ندرس معناها في فصل قادم. أما بالنسبة إلى خاصّية الكمال وخاصّية التقطّع الكامل، فإن معناهما لم يُفهم حقاً إلا بعد أن فكّكت الطوبولوجية المجموعية جذرياً خصائص التواصل التي لا يطالها الحدس الفضائي مباشرة[49].

3.5 ـ هذا الظهور لمواضيع «مخيفة» يعيدنا بالتباين إلى مفهوم سبق إدخاله في عدة مناسبات في هذا المؤلّف، هو مفهوم الموضوع الرياضي «الطبيعي». كنّا نربطه بحصيلة، بحيث من المناسب تحديد معناها. المقصود حصيلة مسبّقة، لكنها مع ذلك، ولنصدّق أنفسنا، غير محكومة مسبقاً بأشكال الحدس. أريد أن أقول من هنا، لا أنّ هذه المواضيع غير ناجمة عن حصيلة أولى فوريّة لتشكّل عمليّاتي للإدراك الحسي: ومن دون شك، في مراحل هذا التشكّل العمليّاتي، معرفة مؤسّسة على التجربة تكون ممكنة، هذا ما حاولته بنجاح مختلف «العلوم المعرفيّة». بل أريد أن أؤكد من باب أولى الميزة التطوريّة وغير الثابتة لأشكال الحدس نفسه، التي هي في الجوهر مظاهر توازن، أو شبه توازن لتنظيمات هي تصوريّة في النهاية، من مستويات مختلفة من التعقيد وبمقدار ما تتطوّر منظومات المواضيع

(49) المستقيم العددي مختزلاً في نقاطه ذات الإحداثيات النسبيّة هو متقطّع كلياً، على نحو ما هو عليه فضاء كانتور. هذه الخاصّية لا يمكن أن تدرك حدسياً بصورة أفضل، لكن المستقيم النسبيّ، مقارنة بالمستقيم العددي، ليس بتصوّر طبيعي.

الرياضيّة، بقدر ما تظهر حالات جديدة، وأحكام جديدة للحدس، من خلالها تُفهم مباشرة الخصائص والمواضيع التي نفكّر بها في الأصل كحصيلة لمفاعيل الإنتاج. لهذا السبب يتحرّك فكر الرياضي دائماً في كون ما. لكن في هذه الأكوان، أحدها هو أول، بمعنى أنه يتكوّن من مواضيع خصائصُها تترابط قبل أي شيء في كليّات متمايزة، لكنها ليست واضحة بالضرورة، بالمعنى الديكارتي هي العدد والشكل الفضائي والمقدار ويقوم الفكر الرياضي، بارتكازه على ثنائيّة الموضوع والعملية، الأولى والمكوّنة لكل فكرة بالذات، بجراحة على الموضوع الطبيعي وتشريحه، ومن ثم يشكّل بمحصّلة ثانية مواضيع مجرّدة افتراضية جديدة، حيث العنصر العمليّاتي هو المهيمن. لكنه يجدّد ويشرّع عرضاً هيكل المواضيع الطبيعية أو إن شئنا، جوهرها.

هذه هي السيرورة المزدوجة التي أردنا وصفها، مطبّقة على رياضيّات الفضاء. حاولنا أن نتفحّص من وجهة النظر هذه فئتين «طبيعيّتين» من الفضائية، فئة الشكل وفئة النسيج. وسنتابع هذا الغرض من خلال فئتين جديدتين تستكملانهما، فئة الاعتلام وفئة القياس.

القسم الثالث

القياس والاعتلام

لماذا نربط في هذا القسم الثالث بين الاعتلام والقياس؟

لأنه سبق أن صادفنا في الجزأين السابقين هذين المفهومين في القسمين السابقين أحدهما والآخر، الأشكال والأنسجة. ذلك أنّنا لا يمكن أن نتناسى ترابطهما وجودياً ـ إن صح القول ـ في المواضيع الهندسية الطبيعية وإن فصل تحليلنا بين هاتين الفئتين من الفضائيّة.

ومعنى الترابط بين التركيبة والقياس مزدوج، فمن جهة يظهر كإدخال للمسافة بين نقاط الفضاء، علاقة خارجية. ومن جهة أخرى، كما سنرى، كخاصية هي على نحو ما داخليّة في مجموعات النقاط، تعطي معنى عملياتيّاً لفكرة محتوى مجموعة.

أما مفهوم الاعتلام، فكان حاضراً في تحليلنا لما تعنيه الأشكال في كونها مواضع في الفضاء. لكن ما يجب تطويره الآن، هو منهجة هذه المواضع النسبيّة، بالإدخال الصريح للإحداثيّات، ولنظريّة المعلم في الفضاء.

سنقسّم هذا البرنامج في فصول ثلاثة:

الفصل السادس: قياس الفضاء.

الفصل السابع: بنية «الفضاء» الخطّي (المتَّجهي) والتمثيل.

الفصل الثامن: متصوّر المتنوّعة.

وإذا كانت الفصول السابقة قد أبرزت حركة تفكيك المواضيع الفضائية الطبيعية، فإن ههنا الحركة المكمّلة لإعادة بناء تمثيل تلك المواضيع ـ صحيح أنه تمثيل مجرّد، لكنه تركيبي ـ هي التي ستتقدّم على الحركة المعاكسة. ولكن من المفهوم أنه لا يمكن فصلهما.

الفصل السادس

قياس الفضاء

افتتح الإغريق باكتشافهم استحالة قياس بعض المقادير بواسطة مقادير أخرى، والبرهنة عليها وتجاوزها، تفكيراً رياضيا جديداً في الفضاء. لا يمكن الشكّ في أنهم لم يدركوا حسياً مفهوم القياس كتحديد جوهري للفضائية. ومع ذلك، وبرغم أن مسألة القياس بواسطة الأعداد الصحيحة قادت في ما بعد إلى التوسّع وإلى إعادة تعريف متصوّر العدد، وجّه الإغريق حلّهم للقياس ناحية أخرى، فمن جهة، أسّس الإغريق نظريّة كاملة ومحكمة لنسب المقادير، وصلت عن طريق إقليدس[1]، فأصبح عندها للقياس النسبي للمقادير الفضائية معنى، سواء أكانت قابلية القياس مع المقدار النموذج قائمة أم لا. غير أن نتيجة القياس سواء أكانت مقداراً نسبيّاً أم لا، لم يكن قد تمّ بعد تصوّرها كعدد، تصوّر لم يتحقّق إلا في شكل أعداد صحيحة. لكن الإغريق، من جهة أخرى أعدّوا بعد البابليين والمصريين، بواسطة متتاليات من أزواج أعداد صحيحة إجراءات

---

(1) Euclide, *Les Eléments* (Paris: Presses universitaires de France, 1990-), V et X, propositions 1-13.

مقاربة للمقادير غير القابلة للقياس، وبالأخصّ جذور التربيع الصمّاء[2].

تقع المسألة التي ستهمّنا هنا بالتأكيد في تبعات الاكتشاف ومعالجة الجذور الصمّاء، لكنّها لم تطرح في تاريخ الفكر الفضائي إلا في مرحلة متأخّرة جداً. إنها مسألة اعتلام النقاط على المستقيم بواسطة الأعداد، ومسألة قياس مجموعتها، وعلى نحو أعمّ متصوّرات قياس مجموعة ما من النقاط.

1 ـ الفكرة الديكارتيّة في قياس قطعة منحنى

1.1 ـ مسألة قياس المقادير يقدّمها ديكارت كأساس لعلم الفضاء بالذات، لأنه يعرّف الهندسة «كالعلم الذي يعلّمنا بصورة عامّة معرفة قياس جميع الأجسام»[3]. القياس معناه أن نخصّ بعدد خطّاً، أو مساحة، أو حجماً. وبما أن ديكارت يعلّم (يرصد) نقاط الرسم من خلال مسافات تفصلها عن محاور ثابتة، فإنّنا نفهم كيف أن الهندسة بالنسبة إليه ترتكز على قياس فضاءات. لكننا نعرف إنه يطرح من البداية تحديداً جذرياً للرسوم الفضائية التي يمكن للعقل التعرّف عليها أي : «الهندسيّات»، حيث المواصفات «دقيقة وصحيحة»، و«الميكانيكيّات» التي لا يمكن أن توصف على هذا النحو، أي إنها حسب ديكارت، تلك التي لا تحدث من خلال «حركة متواصلة، أو من خلال عدّة حركات متلاحقة، أخيراتها تنظّمها سابقاتها، ذلك أنّنا

---

(2) بخصوص التفاصيل التاريخية، انظر : Maurice Caveing, *L'Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, histoire des sciences ([Villeneuve-d'Ascq]: Presses universitaires du Septentrion, 1998).

(3) René Descartes, *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (Paris: J. Vrin, 1964-), vol. 2: *La Géométrie*, VI, p. 388.

نستطيع بهذه الطريقة دائماً أن نحصل على معرفة قياسها معرفة صحيحة»[4].

معنى ذلك أن الرسوم التي تقيّم في العلم المنطقي للفضاء هي فقط تلك التي تتحدّد نقاطها، في تمثيل ديكارتي، من خلال معادلات جبريّة تربط بين إحداثياتها. وينتج عن هذا التقييد أن اللوالب، على سبيل المثال، «غير قابلة للقياس» من حيث المبدأ. وكذلك المنحنى الثاني الذي اقترحه فلوريمون البيوني، وهو منحنى لوغاريتمي[5]، فيعترف ديكارت بأن نقاط هذا المنحنى، المعرّف من خلال خاصّة في مماسّاته، يمكن الحصول عليها من خلال مستقيمين يتحرّك أحدهما بسرعة ثابتة، موازياً لخط التقارب، المأخوذ كمحور للقيمة y، ويتحرّك الثاني موازياً لمحور القيمة x، لكن بسرعات تتناسب عكساً مع المسافات التي يقطعها الأول[6]، فيقال عن الحركتين «إنّهما لا تقبلان القياس إلى درجة أن لا سبيل لانتظام إحداهما وفق الأخرى»[7]، فأدركوا أنّ قياس الكمّيات y ليس دالّة جبريّة على كميّات x، فهو إذاً منحنى ميكانيكي، في عداد المنحنيات التي استبعدها في هندسته.

إلا أن ديكارت يبني نقطة نقطة هذا المنحنى، باعتبار منتهى تقاطعات مماسّين يتقاربان أكثر فأكثر، يؤولان إلى التقاطع على المنحني نفسه[8]. لكن هذا التحديد، الذي يستبق الحلّ المستقبلي،

---

(4) المصدر نفسه، ص 310.

(5) A de Beaune، 20 février 1639، في: المصدر نفسه، ج 2، ص 517.

(6) بعبارات حديثة، إذا قسنا القيم y على المحاذي حصلت لدينا العلاقة $dx/dt=1$ والعلاقة $dy/dt=k/x$ ومنهما العلاقة $dy/dx = 1/x$ حيث المصدر هو الدالّة $y=K\log x$.

(7) المصدر نفسه، ص 517.

(8) المصدر نفسه، ص 514.

من خلال حساب التكامل لمعكوس قضية المماسات، يفترض ما لا نهاية من العمليّات الهندسيّة المتعاقبة. يضاف إلى ذلك، أن البناء نقطة نقطة وإن كان منتهياً، لا يقبله ديكارت كاملاً إلا إذا كان يسمح بتحديد أي نقطة على المنحنى. لكن هذا لا يحصل إلا بخصوص المنحنيات «الهندسية» (الجبرية)، في حال أنه بخصوص «الميكانيكيّات»، لا نبني إلاّ النقاط «التي يمكن تحديدها من خلال قياس أبسط من القياس المطلوب وهكذا مع دقّة في الكلام، لا نجد نقطة من نقاطه أي واحدة من تلك الخاصّة به لدرجة أنّه لا يمكن إيجادها إلا من خلاله هو»[9].

إن مجموعة نقاط منحنى هي غير متجانسة عند ديكارت، إذا كان هذا المنحنى «ميكانيكيّاً»، وعندئذ لا يمكن قياس جميع نقاطه هندسياً. وديكارت يميّز حتى، من بين المقادير حلول معادلة جبرية، تلك التي لا يمكن «توضيحها» من خلال الجذور التربيعية أو التكعيبيّة، لكنه يعترف «بأنها ليست أبداً صمّاء غير قابلة للقياس بمقدار أكثر من تلك التي تتوضّح بواسطة الجذور المذكورة»[10]. وبتوسيعه التصوّر الذي هو في الجوهر تربيع الأقدمين، يقرّ إذاً بأنّ مجمل الأعداد المنعوتة اليوم بالجبريّة، «تقيس» نقاط هندسة صحيحة.

1.2 ـ يبدو أنّ في الإمكان أن نميّز هنا متصوّراً رياضياً حقاً، في ما أطلق عليه اسم متصوّر «طبيعي» للفضاء الديكارتي، فالميكانيكيّ ينتمي فعلاً إلى التصوّر الطبيعي للفضائية، المنبثق من الخيال لا من العقل المجرّد البحت. في القاعدة XIV من **القواعد**

(9) المصدر نفسه، ص 411، وفي رسالة إلى مارسان، 13 تشرين الثاني/ نوفمبر 1629، في: المصدر نفسه، ج 1، ص 71.

(10) رسالة إلى مارسان، 26 نيسان/ أبريل 1643، في: المصدر نفسه، ج 4، ص 658.

(*Regulae*) يعرض ديكارت فعلاً فكرة تعميق الفهم «باللجوء إلى الخيال»[11]، لأن «الامتداد لكونه شيئاً مجسّماً يجب أن تؤخذ عنه أوضح فكرة في الخيال»[12]، وانطلاقاً من ذلك سوف يميّز العقل الصّرف من خلال التجريد الطبيعة البسيطة التي تتأسّس عليها الهندسة، وعلى نحو أدقّ، بالنسبة إلى ديكارت، التحليل الجبري للفضائية. هذا هو دور الخيال الإضافي، إضافي لكنه أساسي بالنسبة إلى العقل البشري، «اتحّاد الروح والجسد» هو أمر طبيعي فيه، والتجريد يجب ألاّ ينسينا أبداً العناصر التي جرى تجريدها:

«لأنه بالرغم من أن العقل لا ينتبه بصفاء إلاّ إلى ذاك الذي تدلّ عليه كلمة (المتصوّر المجرّد)، فإن الخيال يجب مع ذلك أن يكوّن فكرة صحيحة عن الشيء، كي يستطيع العقل عند الضرورة أن يتوجّه نحو الأوضاع الأخرى لهذا الشيء لم يعبّر عنها بالكلمة، وحتى لا يُعتقد أبداً من دون رويّة أنّها استبعدت»[13].

تحدّد الفكرة الطبيعية التخيليّة للفضائية حسيّاً «ككلّ ما له طول، وعرض، وعمق»[14]. لكن الإعداد التصوّري للرياضي يأخذ في الاعتبار التصوّر العامّ للبعديّة، أي «الحال والعلاقة التي يُحكم بموجبها على موضوع ما بأنه يقبل القياس»[15]، فبعد أن يكون العقل قد جرّدها وجمّعها، تعود مختلف أنواع الكميّات التي يميّزها الخيال إلى متصوّر وحيد هو موضوع الرياضيات في شكلي المقدار المتواصل ـ قدر (Magnitude) والمتقطّع ـ كثرة (Multitude).

بالنسبة إلى رياضي ديكارتي يتناول الفضاء، موضوع

---

(11) المصدر نفسه، ج 10، ص 443.

(12) القاعدة XII، **القواعد**، المصدر نفسه، ج 10، ص 416.

(13) المصدر نفسه، ج 10، ص 444.

(14) القاعدة XIV، المصدر نفسه، ج 10، ص 442.

(15) المصدر نفسه، ص 447.

الاختصاص كما رأينا سابقا هو معرفة الرّسوم من خلال القياس، أي من خلال المقارنة بين مدى وآخر، بحيث إن الفئات الثلاث المكوّنة للفضاء الرياضي هي التي يُشار إليها على أنها البعديّة، والوحدة (التي تستعمل للقياس)، والرّسم[16]. ويضيف ديكارت معرفة الترتيب في تحديد الرسوم من خلال القياس المطروح والموضّح في كتابه **الهندسة** الصادر سنة 1636. يلحق ديكارت بالقواعد معرفة الترتيب[17].

1.3 ـ نرى عند ديكارت أنه، إذا كان اعتلام نقاط المنحنى يعرّف من خلال الأعداد، فإنّ الفارق في طبيعة هذه الأعداد، جبريّة أم لا (كلمة متسامية سوف لا تظهر إلا عند لايبنتز)، ينعكس في تنوّع نقاط الفضاء، من حيث إمكانية القياس. سوف لا يحصل التقدّم النظري الحاسم في هذا المجال إلا بعد أن يتمّ تعريف العدد الحقيقي بعدّة طرائق متكافئة[18]. سيطرح كانتور التقابل واحداً لواحد وثنائي

---

(16) المصدر نفسه، ص 447.

(17) «جميع العلاقات التي يمكن أن توجد بين كائنات من نفس النوع، تعود إلى فئتين، هما «الترتيب والقياس»».

(18) لنذكر الطرائق الثلاث الأساسية لهذا التعريف:

طريقة ديديكند تقضي بتقسيم المجموعة المرتّبة للأعداد القياسية في فصيلتين شموليتين وحصريّتين، بحيث إن جميع العناصر في الفصيلة الأولى هي أصغر من أي عنصر في الفصيلة الثانية: هذا القطع يعرّف عدداً حقيقياً. إذا لم يوجد أيّ حدّ أعلى في الفصيلة الأولى وأصغر في الثانية بين الأعداد النسبيّة، فإنّ القطع سوف يعرّف عدداً حقيقياً غير نسبيّ.

كانتور يأخذ في الاعتبار متتاليات كوشي من الأعداد النسبيّة، المتقاربة نحو عدد نسبيّ أو لا. ويعرّف على هذه المتتاليات، المسمّاة بالمتتاليات الأساسية، علاقة تكافؤ، ويعرّف العدد الحقيقي كطبقة تكافؤ من المتتاليات الأساسية.

هيلبرت يعرّف تبديهياً مجموعة الأعداد الحقيقية، بالنسبة إلى العمليّات الحسابية على أنها جسم تبادلي، كامل الترتيب، أرخميديّ تامّ، وأقصى، أي إنه لا يقبل التوسّع من دون أن يخسر واحدة من خصائصه. نبرهن على التكافؤ بين هذه التعاريف الثلاثة.

الاستمرارية بين مجموعة الأعداد الحقيقية R وبين مجموعة نقاط متواصل خطّي كمبده. وهكذا يصبح لمترنة الفضاء حسب ديكارت معنى عمليّاتي عامّ، فينقطع التمييز بين «الهندسي» و«الميكانيكي» عن لعب دور حاسم، حتى ولو أدّت المترنة، في القرن التاسع عشر، إلى نظريّة غنيّة خصبة، هي نظريّة حسابيّة ـ هندسيّة للهندسة الجبريّة[19].

هكذا وجد حلّ أول مسألة أساسيّة في قياس الفضاء بالمعنى الذي كان يدركه الأقدمون. ولكن بما أن هذا الفضاء يعتبر عندئذ كمجموعة من نقاط، فإن أوجهاً جديدة من مسألة القياس سوف تظهر، مرتبطة أوّلاً بعمليّات قياس الفضاء بطرائق التحليل.

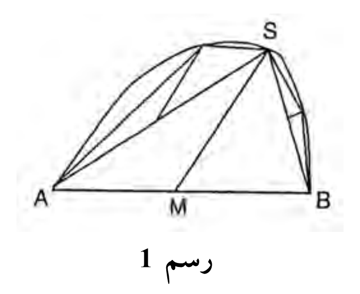
2 ـ القياس كمسألة تربيع : أرخميدس وكافالياري

2.1 ـ ما يهمّنا حقّاً ليس مسألة تقنيّات الحساب نفسه، بل تصوّر قياس محتوى شكل هندسي، كجمع مجموعة من أجزائه، وعلى نحو خاصّ قياس المساحة. صحيح أن هذ التصوّر سبق أن وجد عند أرخميدس، مرتبطاً مباشرة بالسيرورات التي تسمح بإجراء هذا الجمع. لكننا لن نؤكّد مستقبلاً في تحليلنا على الوسائل التي انتهت إلى حساب التكامل، بل سنحاول بالأحرى أن نستخرج الاستراتيجيات التي حكمت على نحو أكثر أو أقلّ وضوحاً تشكّل التصوّرية العامّة لقياس الفضاء. نعتقد اننا نستطيع أن نميّز من وجهة النظر هذه استراتيجيّتين متعارضتين ومتكاملتين. إحداهما توضح وتستثمر الميزة الفضائية الصرفة للشيء موضوع القياس، والأخرى على نقيض ذلك تسعى إلى نزع الفضأنة عن الموضوع، وإلى أن

(19) انظر حول هذه النقطة: Jean Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, collection Sup. Le Mathématicien; 10-11 ([Paris]: Presses universitaires de France, 1974).

تجرّد منه شروطاً أعمّ للقياس، فالأولى تتصوّر القياس «كترصيف»، والثانية تتصوّره كاختيار «داليّة» مجرّدة عن الشيء موضوع القياس. هاتان الاستراتيجيّتان تظهران وتتوافقان في الحلول المقدّمة لمسألة التكامل التقنيّة، في كونها مقاسة مساحة محصورة بخطّ معيّن. سنصف بإيجاز بعض تناسخات هاتين الاستراتيجيّتين، آخذين بداية كمثالين نموذجيّين أرخميدس وكافالياري.

2.2 ـ نموذج أرخميدس مدهش على نحو خاصّ، لأنه ترك لنا عدّة حلول لمسألة قياس مساحة قطاع قطع مكافئ، حيث أحد هذه الحلول يعتمد استراتيجيّة فضائية (المبرهنة 24 في **تربيع القطع المكافئ**)، وآخر يعتمد استراتيجية نزع الفضأنة (القضية 1 في **الطريقة**). في المبرهنة 24 في رسالة إلى دوستييه، يبرهن أرخميدس على أن مساحة قطاع قطع مكافئ محصور بوتر تساوي 4/3 مساحة المثلّث المحاط حيث الوتر هو قاعدته وحيث رأسه هو النقطة التي هي تقاطع المنحني مع القطر الموازي لمحور القطع المكافئ الخارج من وسط الوتر. مساحة هذا القطاع تقارن إذاً بترصيف تدريجي للقطاع نحصل عليه بالإضافات المتعاقبة إلى هذا المثلث المحاط، أولاً إضافة اثنين، ثم أربعة، ثم 2^n مثلّثاً، مبنيّة بنفس طريقة المثلّث الأوّل على أضلاعها المتعاقبة (رسم 1).



رسم 1

هذا البناء المحاط يرسم داخل القطاع مضلّعاً، عدد أضلاعه

يتزايد، بحيث مساحته هي مجموع متسلسلة حدّها الأوّل هو المثلّث الأصلي، وكل حدّ متتال هو ربع الحد السابق، هذا ما بيّنه أرخميدس باستعماله خصائص القطع المكافئ المعروفة (القضية 21). منتهى هذا الجمع من الحدود التي هي في تدرّج هندسي علّته 1/4 يساوي أربعة أثلاث المثلّث الأصلي، أي إن مساحة المضلّع المحاط، عندما يتزايد عدد ضلوعه n، تتقارب نحو أربعة أثلاث مساحة المثلّث ASB، لكنها أصغر دائماً. الافتراض الضمني هو أن المضلّع اللانهائي الأضلاع يملأ القطاع كله، لكن أرخميدس يبرهن من دون أي مرور للاّنهاية أن مساحة القطاع لا يمكن أن تكون لا أكثر ولا أقلّ من المساحة المذكورة: من المفروض إذاً أن تكون مساوية لها، ونشير إليها بالحرف K.

آلية البرهان تستعمل فقط مأخوذاً (مبرهنة تمهيديّة) يؤكّد أنه، إذا كان أيّ عنصر في متتالية ما أصغر من نصف العنصر السابق فإننا، نستطيع الحصول بخصوص مؤشّر n مختار بصورة ملائمة على عنصر u_n صغير بقدر ما نريد[20]. لنفترض إذاً أن مساحة القطاع هي أكبر من K. بعد عدد ملائم من عمليّات بناء المضلّع، يمكن أن نحصل بفضل المأخوذ على باق، هو الفارق بين مساحة القطاع ومساحة المضلّع، أصغر، على سبيل المثال، من الفارق بين مساحة القطاع والقيمة K، الذي هو موجب بمقتضى الافتراض ـ وهذا يعني بأن مساحة المضلّع تكون أكبر من K، وهو ما لا يمكن حصوله، إذ بيّنا أنه دائماً أصغر من K.

باستدلال مماثل يقصي أرخميدس الافتراض الآخر بأن مساحة القطاع أصغر من K. برهانه بطريقة الخلف بأن القيمة K هي هذه

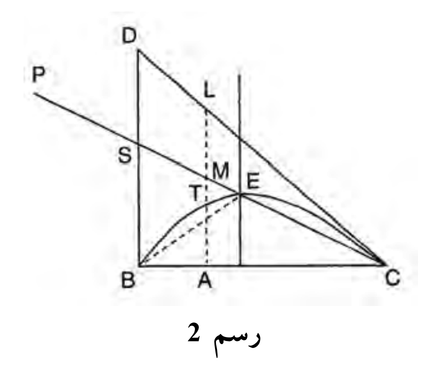
---

(20) Euclide, *Les Eléments*, X.1.

المساحة لا يستدعي إطلاقاً أي مرور إلى المنتهى. صحيح أننا نستطيع القول، في أخذنا في الاعتبار المثلّثات التي ترصف القطاع مع باق، بأن هذا الباقي يؤول نحو الصفر عندما يؤول عدد أضلاع المضلّع المحاط نحو اللانهاية، بناء على المبرهنة 1 في كتاب إقليدس X. لكن أرخميدس لا يستدلّ على هذا النحو، حيث استدلاله، المتناهي بصورة تامّة، يقتصر على بيان أن الحصول على فارق بين مساحة القطاع ومساحة المضلّعات صغير بقدر ما نريد، هو متناقض، إن لم يكن هذا الفارق صفراً. ومع ذلك مقارنة مساحة القطاع مع القيمة K، أي أربعة أثلاث مساحة المثلث الأول ASB هي على نحو ما اعتباطية هنا. هي مقارنة لم تستوح إلاّ من خلال افتراض ضمني بالمرور إلى المنتهى الذي لم يشر إليه هنا: ملء القطاع بالمضلّع اللامتناهي الأضلاع.

2.3 ـ ليس الأمر كذلك في البرهان الوارد في رسالة إلى أراتوستين عنوانها الطريقة، إذ يكتشف عالم الهندسة في برهانه قيمة مساحة القطاع، أي أربعة أثلاث مساحة المثلّث المحاط. وبما أنه يستعمل حسب الظاهر خصائص التوازن العائدة إلى الميكانيكا، فقد حرص أرخميدس على القول بأن القضية الهندسية لم يبرهن عليها بالمعنى الحصري للكلمة. سنرى مع ذلك أنّ الميكانيكا في الواقع هنا ليست سوى ترجمة حسيّة لعمليّات جبريّة محض مجرّدة، تعطي لقياس الفضاء معنى جديداً غير فضائي إن صحّ القول.

لنأخذ في الاعتبار المثلّث المشكّل من الوتر BC، ومن خط المماسّ على القطع المكافئ CD المارّ بطرف القوس، أي النقطة C، والموازي BD لمحور القطع المكافئ المارّ بالطرف الآخر B (رسم 2).



رسم 2

لنمرّر من الطرف C مستقيماً يمرّ بالنقطة S وسط BD. الخطّ المستقيم الموازي للمحور المنطلق من النقطة A على الوتر في القطاع، سيقطع القوس في النقطة T، وضلع المثلّث CD في L، والخطّ CS في M، وسط AL. خاصّية في القطع المكافئ تبيّن عندئذ أن LA/LT = SC/SM.

إذا مددنا CS بطول SP = SC، وإذا أخذنا هذا المستقيم كميزان نقطة ارتكازه في S، فإنّ نظريّة أرخميدس في التوازن تبيّن أن المستقيم AT، الذي يحتويه القطاع، على افتراض أن له وزناً، منقولاً إلى P، يوازن المستقيم في المثلّث AL، موضوعاً في M التي هي مركز ثقالته (لأن MA = ML). وإذاً وزن جميع المستقيمات في القطاع يوازن وزن جميع أضلاع المثلّث معلّقة معاً في مركز ثقالة هذا المثلث G، الواقع في ثلث SC. بحيث إن أوزان المستقيمات في القطاع وأوزان مستقيمات المثلّث هي في نسبة ذراعَي الرافعة، أي 1/3. والحال أن أرخميدس يقول إن المثلّث والقطاع «يتألّفان من المستقيمات التي يحتويانها». واستتباعاً تساوي مساحة القطاع ثلث مساحة المثلث BCD، الذي برهن بسهولة على أنّ مساحته تساوي أربعة أضعاف مساحة المثلّث المحاط BCD. وإذاً مساحة القطاع هي أربعة أثلاث مساحة المثلّث المحاط، فقياس

مساحة قطاع القطع المكافئ نحصل عليه هنا لا بترصيف مؤلّف من مساحات أصغر من المساحة المفروض ترصيفها، بل في الأخذ بالاعتبار عناصر خطّية. لكن أرخميدس لا يشير أبداً إلى فارق البعديّة، ويقول ببساطة إن المساحة تتألّف من مستقيمات، فهناك نزع فضأنة ضمني في الرسم. مقارنة قياسات المساحات (قطاع، مثلّث) تتبيّن من خلال علاقة خطّية على المستقيمات التي تؤلّفها وقياس المساحة يظهر، بلغة حديثة، كدالّية ـ شكل خطّي ـ على مجموعة من خطوط، فأرخميدس لم يدخل البتة في رسالته «الطريقة» متناهياً في الصّغر. كما فعل كل من باسكال ولايبنتز، لكي يترمّم التجانس بين العناصر والسطح. ولا تبرز طريقته كأول شكل لحساب اللامتناهي في الصغر، بل كسبق مبهم للتعاريف الصوريّة الحديثة للقياس كأشكال خطّية سنتحدّث عنها قريباً.

2.4 ـ بصورة مستقلة تماماً عن أرخميدس، الذي لم يُكتشف نصّه **الطريقة** إلا في العام 1906.

اقترح تلميذ غاليليه، فرانسيسكو بوتافانتورا كافالياري، في العام 1635 طريقةً لقياس المساحات والأحجام، نازعة للفضائية بالمعنى الذي نفهمه، بما أنّها تنظر في المساحة أو الحجم لا كعناصر مساحة أو حجم بل كمجموعات من الخطوط أو المسطّحات[21]. لنقتصر الآن على قياس المساحات، إذ الانتقال إلى الأحجام أمر واضح. يحصر كافالياري المساحة المطلوب قياسها بمسطّحين مماسّين للمنحنى الذي يحدّها قائمين أو مائلين ـ فهذا لا يهمّ ـ على مسطّح المساحة، فبنقل واحد من هذين المسطّحين المحدّدين بصورة متوازية

(21) Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiae: typis C. Ferronii, 1635).

نستشهد من الطبعة الجديدة للعام 1653، وغالباً ما نترجم.

وبسرعة ثابتة إلى أن يتطابق مع الآخر، سيغطّي مساحة قطع من خطوط مستقيمة متساوية الابتعاد، هي تقاطعات المسطّح المتحرّك مع مسطّح المساحة. يطلق كافالياري اسم قاعدة على الاتجاه المشترك لهذه الخطوط المتوازية[22]. هذه «الخطوط» أو هذه المسطّحات، التي «لا تقبل التقسيم» بالنسبة إلى المساحة أو إلى الحجم، عددها غير محدّد، يرتبط بسرعة المسطّح المتحرّك القاطع، فترتها المشتركة هي أيضاً غير محدّدة لكنها ثابتة بخصوص نفس القاعدة المعيّنة. هذه القطع المستقيمة هي التي يأخذها كافالياري بعين الاعتبار ويشير إليها مجتمعة بعبارة نترجمها «بمجموع الخطوط»، إذ لا طبيعتها الفردية ولا تعدّدها يلعب دوراً بل منظومتها، وهذا ما يشير إليه إشارة غامضة مؤلّف «اللاقابلات التقسيم» بقوله : يجب أن نفهم بالنعت «مجموع» أنّ أيّ خطّ هو غير مستبعد[23]. يُقارن هذا الغطاء في نصّ آخر[24]، بقماشة تتشكّل من خيوط متوازية بالنسبة إلى الرسوم المسطّحة، وبكتاب من أوراق متوازية بالنسبة إلى المجسّمات. معنى هذه العبارة بالضبط هو الذي طرح قضيّة في نظر معاصري كافالياري. والحال أن هذه «المجاميع من الخطوط» فعلاً هي التي تشكّل الأداة الأساسيّة في مقارنة المساحات، وبالتالي قياساتها. يجب أن نفهم قبل كل شيء، ما قيل في محاضرة من الكتاب الثاني، أنّ كافالياري عندما يقارن مجموع الخطوط في مساحتين، «لا يقارن إطلاقاً أعدادها، التي هي مجهولة، بل مقاديرها، التي تتكافأ مع الفضاء الذي تشغله»[25] هذه

---

(22) المصدر نفسه، ص 99.

(23) المصدر نفسه، ص 483.

(24) *Sex exercitationes*, 1647.

(25) المصدر نفسه، ص 112.

«المجاميع من الخطوط» هي بالفعل مقادير، إذ:

1) يمكن أن تكون عدة مجاميع من خطوط متساوية في ما بينها، على سبيل المثال، مجاميع خطوط الرسوم المسطّحة المتطابقة، القائمة على نفس القاعدة (المبده 1).

2) يمكن أن تُطرح أو تجمع[26].

3) هذه المجاميع هي في نسب في ما بينها[27].

تمّ إثبات هذه الخصائص باعتبار قواعد متوازية ومن نفس الفترة، وبالمقارنة بين خطوطها المتماثلة. يستند متصوّر «النسبة» المستعمل إذاً إلى التعريف المنعوت بالأرخميدي: «المقادير التي يقال إن في ما بينها نسباً هي المقادير التي يستطيع أي واحد منها أن يتخطّى الآخر، من خلال الضرب»[28] فالبرهنة الأساسية هي إذاً: «الرسوم المسطّحة تتمتّع في ما بينها بنفس نسب مجاميع خطوطها، والمجسَّمات تتمتّع في ما بينها بنفس نسب مجاميع مسطّحاتها، مهما تكن القاعدة»[29].

الشرط «مهما تكن القاعدة» هو أساسي، وكافالياري يأخذ كمثال مجموع المسطّحات (متوازيات الأضلاع) المقطوعة بموازاة مع المحور في أسطوانة، ومجموع المسطّحات (دوائر)، المقطوعة بموازاة القاعدة، أنّهما «من المجاميع المسطّحة» المتكافئة، يغطّيان نفس المجسّم[30].

(26) المصدر نفسه، المبرهنة 1، ص 108.
(27) المصدر نفسه، المبرهنة 1، الصفحة 110.
(28) المصدر نفسه، ص 109.
(29) المصدر نفسه، المبرهنة 3، ص 113.
(30) المصدر نفسه، لازمة، ص 113.

لم تكن اللاقابلات التقسيم خصبة كأداة تربيع إلاّ لماماً. والنتائج المثبتة في «الهندسة» (Géometrica) أو في التمارين (Exercitationes) كانت معروفة في معظمها. لكن النظريّة تنطوي على تصوّر للمتواصل، هو للأسف غير واضح. فضلاً عن ذلك، يدوّن كاتبنا أنّ التصوّر الفلسفي للمتواصل غير هامّ :

«يكفي أن تتبع المتواصلات تناسبات اللاقابلات التقسيم . . . لم نعالج مجاميع هذه الأخيرة كما لو أنها لانهاية من مستويات أو من خطوط، بل في كونها تكتسب طبيعة ووضعاً متناهياً»، ككميّات تقبل المقارنة[31].

المتواصل ليس بشيء آخر، لا هو أكثر ولا هو أقلّ من لاقابلات التقسيم، هذا ما قيل في المحاضرة المذكورة آنفاً. وكي تكون المتواصلات قابلة للقياس، يجب إذاً أن نتمكّن من مقارنة لا مجموعات من أفراد معدودة، بل من مقارنة ذاك الذي تدلّ عليه العبارة التي نترجمها «بمجموع الخطوط»، «وبمجموع المسطّحات» لمساحة أو لحجم. هذا هو معنى الصيغة «Omnes lineæ», «Omnia plana».

لكن كافالياري يعترف بأن فكرة العبارة مجموع الخطوط (Omnes lineæ) هي فكرة صعبة (Adhuc videtur subobscurus) وأنّ هنا نوعاً «من عقدة غورديّة يجب فكّها أو قطعها»[32]. ومع ذلك يعتقد بأن هذا ما فعله في هذا الكتاب السابع، من دون أن يكون جديد شروحاته بالنسبة إلى سابقاتها جليًّا واضحاً. في الواقع، سوف لا تتوضّح إلا بالتخلّي عن استراتيجية نزع الفضائيّة، عندما يقدم

(31) المصدر نفسه، ص 483.
(32) المصدر نفسه.

باسكال أحد الأوائل، على تفسير المسطّحات والخطوط غير قابلة التقسيم على أنها عناصر مساحة أو حجم من عرض ومن سماكة ثابتة لامتناهية في الصغر. بحيث يمكن أن تقدّم محاولة كافالياري نزع الفضائية كذلك كلقاء مع لامعقولية واستغلال موفّق شبه أعمى لها في بناء نظرية قياس الأفضية، لامعقولية شبيهة بتلك التي درسناها في مؤلَّف آخر[33] وتمكنت صياغة جديدة من حلّها.

3 ـ باسكال ولايبنتز

3.1 ـ كنّا بصدد توصيف أمثلة مأخوذة في زمنين جد متباعدين من تاريخ الرياضيات، أمثلة تتجلّى فيها استراتيجيّتان لتصوريّة القياس. ولكي نبيّن تناوبهما وتنافسهما، لنأخذ مثالين آخرين، معاصرين في إنشاء حساب اللامتناهي في الصغر بالذات[34].

عند باسكال نرى أوّلاً، كما رأينا سابقاً، إعادة تفسير مفضأن لنظريّة غير قابلات التقسيم. في رسالة كبرى من السيد ديتونفيل إلى السيد كاركافي بخصوص الروليت، يؤكّد باسكال أنّ طريقة غير قابلات التقسيم ـ «القواعد الحقيقية لغير قابلات التقسيم» ـ يمكن إرجاعها «إلى صرامة الأقدمين وطريقتهم»، وأن «إحدى هذه الطرائق لا تختلف عن الأخرى إلا بأسلوب التعبير»[35]. والحال أن طريقة الأقدمين ما هي إلا تلك التي تعتبر قياس الفضاء كترصيف بواسطة أفضية دونه في الصغر، فهو عندما يستعمل على طريقة كافالياري في

(33) Gilles-Gaston Granger, *LIrrationnel* (Paris: O. Jacob, 1998).

(34) من الواضح أنه، إذا تكفّلنا هنا بدراسة أسلوبيّة مقارنة، فإنّ تفحّص مثال ثالث واجب، هو مثال نيوتن.

(35) Blaise Pascal, *Oeuvres complètes,* bibliothèque de la pléiade (Paris: NRF; Gallimard, 1954).

عبارة «مجموع خطوط»، «مجموع الإحداثيات» في ربع الدائرة على سبيل المثال، يقصد «مجموع عدد غير محدّد من المستطيلات المعمولة على كلّ إحداثية مع كلّ واحدة من القطع الصغيرة المساوية للقطر، والتي مجموعها هو بالتأكيد مسطّح»[36]. ويلاحظ باسكال أنه عندما نتحدّث عن تعدّد غير محدّد من الخطوط،

«نستند دائماً إلى مستقيم معيّن من خلال قطع متساوية وغير محدّدة تكون مضروبة به»[37].

هذا ما يشرح بوضوح شرط كافالياري في المساواة بين فترات انتقال القاعدة، ويستبق مفهوم متغيّر التكامل، وعنصر اللامتناهي في الصغر في حساب لايبنتز. وهكذا يستنتج.

«أن هذا النوع من العبارات؛ مجموع خطوط، مجموع مسطّحات... إلخ. ليس فيه إلاّ ما هو مطابق للهندسة البحتة»[38].

إنّ هذه الرغبة في التطابق «مع الهندسة البحتة» هي ما يميّز استراتيجية الفضأنة.

فضلاً عن ذلك، نرى أن باسكال يدخل في نفس النصّ أداة قياس تعود إلى استراتيجية رفع الفضأنة تتعلّق بـ «المجاميع المثلّثيّة» و«المجاميع الهرميّة». نقطة الانطلاق هي فكرة أرخميدس، المعروفة من خلال مبحث توازن المسطّحات والقضيّتين رقم 14 ورقم 15 في تربيع القطع المكافئ، حيث يأخذ باسكال في الاعتبار المستقيم BA مقسوماً إلى عدد غير محدّد من الأجزاء المتساوية، ويفترض أن أوزاناً، أو مقادير أخرى، تُعلَّق في نقاط التقسيم. المجموع المثلّثي

---

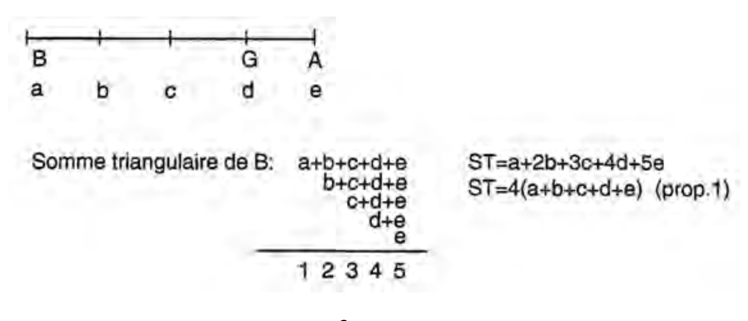
(36) المصدر نفسه.

(37) المصدر نفسه، ص 233.

(38) المصدر نفسه، ص 234.

انطلاقاً من الطرف B هو مجموع جميع الأوزان، مضافاً إليه مجموع جميع الأوزان منقوصاً من الوزن المعلق في B، وهلمّ جرّاً بالطرح المتعاقب للوزن الطرفي حتى الوصول إلى ما قبل الأخير. المجموع المثلّثي الناتج يحتوي إذاً مرّة واحدة الوزن المعلّق في B ومرَّتين الوزن الذي يليه... ومرات عددها n الوزن الأخير إذا كان في المستقيم نقاط تقسيم عددها n.

إذا افترضنا أن المستقيم هو عبارة عن ميزان نقطة ارتكازه G هي إحدى نقاط التقسيم، يبيّن أنّ المجموع المثلّثي يكون في حالة توازن الميزان، انطلاقاً من B مساوياً للمجموع البسيط للأوزان مضروباً بطول ذراع الرافعة BG (عدد نقاط التقسيم على BG)، فنستطيع إذاً حساب موقع G، مركز الثقالة، في حال معرفة المجموع البسيط للأوزان ومجموعها المثلّثي. يبيّن باسكال الخصائص الجبريّة للمجاميع والمجاميع المثلثيَّة، التي هي بحيث، عندما نضيف نفس المقدار إلى كل وزن من الأوزان، أو نضربها بنفس العدد، يكون حساب المجاميع الجديدة تحويلاً خطياً.



رسم 3

والحال أن هذه الأداة الجبريّة الصّرفة يُمكن أن تطبّق على قياس المقادير، إذا انتقلنا من «أوزان» معلّقة إلى مقادير من نوع ما، وإذا رفعنا على نحو غير متناه عدد تقسيمات الميزان، جاعلين فترتها غير

متناهية في الصغر. عندئذ تسمح الخصائص الجبريّة للمجاميع المثلثيّة بحسابات تربط «مجموع هذه القطع»، مثلثيّة أو بسيطة بذراعي الميزان.

لكن الحقيقة مع ذلك هي أن باسكال يفسّر النتائج دائماً مبرزاً وموسّعاً المعنى المفضأن للقياسات، لأنه عندما يتحدّث عن «مجموع خطوط» أو مجموع مربّعات خطوط على سبيل المثال، يوضّح أنّ من الواجب فهم ذلك على أنّ الأمر يتعلّق مجموع المضروبات من المقادير بكلّ واحد من القطع الصغيرة المتساوية التي تقسم «الخطّ الذي وُلدت منه»، كما في حالة «مجموع الإحداثيّات» التي هي مستقيمات عموديّة على المحور منطلقة من نقاط تقسيم هذا المحور، أو كما في حالة «مجموع جيوب» تكون عموديّة على قطر ومنطلقة من نقاط تقسيم القوس[39]، فنلاحظ إذاً بهذا المعنى أنّ مجموع خطّ يفضي إلى مسطّح وأنّ مجموعاً مثلّثيّاً يفضي إلى مجسَّم.

«يتألف من مسطّحات (متوازية) بعدد ما يوجد من تقسيمات على المحور؛ مسطّحات يتشكّل كل واحد منها من مجاميع بسيطة خاصة من الإحداثيات، حيث إن المجموع العامّ يشكّل المجموع المثلّثي»[40].

مجموع الإحداثيّات (أو الجيوب) لرسم مسطّح هو كذلك مجموع شرائح متوازية، والمجموع المثلّثي هو مجموع أحجام مبنيّة على هذه الشرائح، بحيث إنّ مجموع الخطوط هو في لغة غير قابلات للتقسيم، غير قابل تقسيم بالنسبة إلى مجموع مثلّثي،

(39) المصدر نفسه، ص 233.

(40) المصدر نفسه، ص 238.

والمجموع المثلّثي هو غير قابل تقسيم بالنسبة إلى مجموع هرمي[41].
«بما أنه أنقص منه ببُعد»[42].

لكن هذه السيرورة تقود فوراً إلى أن نأخذ في الاعتبار مواضيع غير فضائية بطبيعتها، من أكثر من ثلاثة أبعاد، لأن المجموع الهرمي هو «مجسّم» من أربعة أبعاد، «مسطّح ـ مسطّح»، «يتألف من مجسّمات هي بقدر ما يوجد من قطع في المحور» (مضروبة بقسم من المحور). وهنا يتعرّف باسكال على أحقيّة تخطّي الأبعاد الثلاثة: «يجب ألاّ نتضايق من هذا البعد الرابع»[43]، وسبب ذلك أنّ هذا الأخير يُبنى انطلاقاً من البعد الثالث كما بُني البعد الثالث انطلاقاً من الثاني، فيبدو أنّ باسكال يتخلّى لبعض الوقت هنا عن الاستراتيجية المفضأنة مقدّماً الخصائص الجبرية للمقادير على الخصائص الحدسيّة الفضائيّة الصّرفة التي تحكم التركيب الجمعي للقياسات.

3.2 ـ عند لايبنتز نجد بكل تأكيد استراتيجيّة مفضأنة جوهرياً لقياس المساحات من خلال جمع ما لا نهاية من العناصر السطحيّة اللامتناهية في الصغر. في حين أنه، يطرح في رسالة إلى أولدنبورغ في 27 نيسان/ أبريل سنة 1676[44] سيرورة تربيع يظهر فيها القياس

---

(41) نحصل على مجموع هرمي بجمع متتالية من المجاميع المثلثيّة حيث نطرح منها في كل مرة السطر الأول، على نحو ما نحصل على مجموع مثلّثي بجمع المجاميع البسيطة التي نطرح منها العنصر الأول:

مجموع مثلّثي a + b + c مجموع هرمي a + b + c + b + c + c

b + c   b + c + c

c   c

(42) المصدر نفسه، ص 238.

(43) المصدر نفسه، ص 239.

(44) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften und der Briefwechsel mit Mathematikern*, Gerhardt, XIV.

بوضوح كنتيجة عمليّات جبريّة، مرتبطة بخصائص لامتناهية في الصغر، ويؤكّد: «حتّى طريقتي الخاصة (بالتربيع) ليست سوى لازمة لمذهب التحويلات العام» تبدو هنا كتبديل للمتغيّر.

في ما هو تناول جبري للقياسات، نودّ نقل المثال الذي طرحه لايبنتز نفسه على مراسله. الموضوع هو تربيع ربع الدائرة. ترتكز استراتيجية لايبنتز إذاً على تحويل عنصر المساحة بواسطة تبديل المتغيّر بطريقة تجعل عبارته كسراً نسبيّاً في المتغيّر الجديد. سيعود التربيع بالتالي إلى تكامل مجموع متناه أو لامتناه، من قوى هذا المتغيّر. من وجهة النظر التي تهمّنا هنا، النقطة الهامّة هي تحويل عنصر المساحة مع الاحتفاظ بقيمة مساحته (الرسم 4).

معادلة الدائرة في هذه الحال هي $x^2+y^2 = 2rx$. نمدّ المستقيم OD والمستقيم 'OD العائدين لشريحة من الدائرة موازية لمحور القيم y، مفترضة لامتناهية في الصغر، متوافقة مع التغيّر . هذان المستقيمان يقطعان الشعاع QP الموازي للمحور OY في النقطة N والنقطة 'N. لنفترض أن z هي إحداثية نقطة غير معيّنة على QP انطلاقاً من Q. لدينا $N\text{-}N' = \Delta z$. تسمح العلاقات في الدائرة بأن نكتب، آخذين في الاعتبار مثلّثات متماثلة:

$$x = \frac{2r^3}{z^2+r^2} \text{ et } y = \frac{2r^2 z}{z^2+r^2}$$

يُكتب التزايد Δz إذاً، بالنسبة إلى المتغيّر الجديد z^i، وفق

$$\frac{2r^3}{(z-\Delta z)^2+r^2} - \frac{2r^3}{(z^2+r^2)^2}$$

ويصبح، بقول لايبنتز عندما تؤول Δz نحو الصفر «بعد القسمة والحذف»:

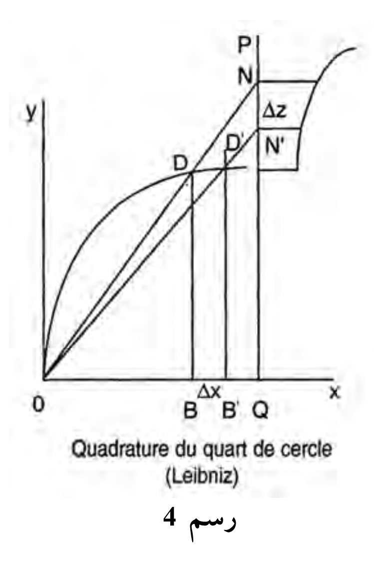
$$\frac{4r^3 z}{r^2+z^2}\Delta z$$

عنصر المساحة في ربع الدائرة المُقاس من خلال y في

الإحداثية x والأحداثية y يصبح إذاً:

$$\frac{2zr^2}{z^2+r^2}\times\frac{4zr^3}{\left(z^2+r^2\right)^2}\Delta z=\frac{8r^5z^2}{\left(r^2+z^2\right)^3}\Delta z$$

عبارة عن مستطيل لامتناهي في الصغر حيث إحدى جهاته هي كسر نسبي. وهكذا نجد أن قياس المساحة الجزئية يتحوَّل، من دون تغيير في القيمة، من خلال عمليّات جبريّة وحذوف في مقادير لامتناهية في الصغر، إلى قياس تكامل.



Quadrature du quart de cercle
(Leibniz)

رسم 4

4 ـ النظريّة الصوريّة للقياس

4.1 ـ بيّنا بعض الردهات التاريخيّة في تكوين متصوّر القياس، وذلك في اتجاهين. من جهة بالحفاظ على الخصائص الحدسيّة، وإلى حدّ ما التجريبيّة، للفضائيّة؛ ومن جهة أخرى بإدخال عمليّات من المفترض أن تبرز معناها المجرّد. ويمكن ملاحظة نهاية هذا الإعداد المزدوج مع التشكيل الحديث نسبياً لنظرية صوريّة للقياس، الذي لم يعد بالضرورة قياس فضاء، بل بصورة أعمّ وأكثر تجرّداً

قياس مجموعة. وفي هذه النظريّة أيضاً، تظهر الاستراتيجيّتان اللّتان ميّزناهما سابقاً برغم أن هذا التعريف الصوري هو في النهاية نازع للفضائية أساساً. لكننا سنقوم مع ذلك برصد وجهين مختلفين فيه، يعودان على نحو خاصّ إلى كل واحدة من تينك الاستراتيجيّتين: الإعداد لمتصوّر قياس مجموعة، الذي يعمّم قياس الفضاء، والإبراز حديثاً لمتصوّر القياس كعنصر في الفضاء الصنوي (الازدواجي) لفضاء من الدوال المستمرّة[45].

ظهرت ضرورة تعريف متصوّر القياس صوريّاً للرياضيين عندما صادفوا صعوبات في تبرير تكامل بعض الدوال تبريراً دقيقاً. أشرنا حتى الآن لاستعمال مفهوم القياس في معرض التّرابيع أي في حساب المساحات المحاطة بمنحنيات معروفة. وسوف تطرح مسائل جديدة عندما يطرح حساب اللامتناهي في الصغر القضيّة على نحو أعم في تكامل الدّالة. على أنّ متصوّر قياس الفضاء يعود تاريخياً إلى المتصوّر الذي استعمله أرخميدس، في المبرهنة 24 من تربيع القطع المكافئ: نقيس الفضاء برصفه بأفضية أولية يفترض أنّ القياس فيها معرّف (أشباه منحرف أو مستطيلات)، والرّصف المتزايد الدقّة يقرّب شيئاً فشيئاً من المساحة المطلوبة، إلى أن يصل إليها في المنتهى[46].

شكّل كوشي صيغة هذه السيرورة على نحو بسيط بتقسيم

---

(45) مفهوم «الفضاء» ومفهوم «الفضاء الصنوي» يعودان إلى تصوّر الفضاء الخطّي الذي سيدرس في الفصل القادم. الفضاء الصنوي لفضاء خطّي هو فضاء من التطبيقات الخطّية العاملة من هذا الفضاء نحو الجسم الذي يشكّل قاعدته، هو فضاء خطّي جديد.

(46) من وجهة النظر هذه هناك صعوبة أساسيّة أظهرتها سيرورة الرصف بواسطة المضلّعات كان قد قدّمها أرمان شفارز (أ. شفارز (A. Schwarz)، رسالة إلى جينوتشي). مجموع المساحات المضلّعة المحاطة بطريقة ما بالمساحة الجانبيّة لأسطوانة دورانية ليس له منتهى محدّد.

المقطع المستقيم [0,x] من محور القيم x إلى مقاطع لا تقاطع بين أيّ اثنين منها $[x_i, x_{i+1}]$، ويعرّف تكامل الدالة f (x) بين الصفر وبين x = x_n على أنه المنتهى $\lim\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ عندما يؤول n نحو اللانهاية بحيث إن الحد الأعلى للقيم (x_i, x_{i+1}) يؤول نحو الصفر، وهو مجموع يتقارب تأكيداً إذا كانت الدالّة مستمرّة ومحدودة. عندما تكون حافّة المساحة المطلوب تربيعها دالّة ما، نرى بالفعل أن تحديد المساحات الأوّلية للرصف ليس صعباً إذا كانت الحافّة رتيبة، أو حتى مستمرّة فقط. وإلا سيكون من الواجب أن ناخذ في الاعتبار نقاط عدم الاستمرارية في $[x_i, x_{i+1}]$.

ريمان هو من أعطى في مبحثه للحصول على الأهليّة في العام 1853 شرط قابليّة التكامل، الذي يُدخل تأرجح الدالّة على مقطع، أي الفارق بين الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى للقيم التي تأخذها الدالّة على هذا المقطع. يجب أن يكون بالإمكان جعل مجموع التأرجحات على مقاطع التكامل مضروبة بطول تلك المقاطع صغيراً اعتباطياً وذلك باختيار موفّق للتقسيم. والمقصود إجمالاً هو نوع من قياس يثقل نقاط عدم الاستمرارية. كان لوجون ديريكليه ولايبنتز لايزالان يعتقدان أن العائق أمام التكامل الناجم عن نقاط عدم الاستمرارية، يرتبط «بعددها» وبكثافتها. مع ذلك أظهر ريمان في المقام الأوّل ما سيكون قياس مجموعتها، وقدّم مثال دالّة تقبل التكامل وفق تعريفه برغم أنّ نقاط عدم التواصل فيها غير متناهية[47]. لكن تصوّر ريمان ظلّ غير مرضيّ، فهو تصوّر على سبيل المثال، يميّز بصورة ظاهرها متناقض الدالّة التي تأخذ القيمة صفر بخصوص x أصم والقيمة 1 بخصوص x كدالّة لا تقبل التكامل، وبنى سميث في العام 1875،

(47) إنها الدالة $f(x)=\sum_{n>1}\frac{[nx]}{n^2}$ حيث [nx] هو الفارق بين وبين أقرب عدد صحيح.

دالّة هي أيضاً لا تقبل التكامل وفق ريمان تشكّل نقاط عدم استمراريّتها مع ذلك مجموعة «نادرة»[48]، فالقضيّة التي ستطرح نفسها بعد ذلك هي قضيّة المعنى الواجب إعطاؤه لقياس مجموعة من النقاط.

4.2 ـ المثال الأسمى في بناء هذا التصوّر هو بكلّ وضوح الفكرة «الطبيعيّة» لقياس طول. لكن الموضوع الجديد «مجموعة من نقاط» فَقَدَ الآن، بصورة عامّة، خصائص الأفضية الطبيعيّة، أي خصائص الرّسوم، بيد أنّ جميع نظريّات القياس الصوريّة، قياس مجموعات من النقاط على المستقيم العددي على سبيل المثال، تأخذ كمعطى أصلي فكرة قياس فترة من هذا المستقيم، معرّف على أنّه طوله، أي الفارق بين العددين العائدين لطرفيه. والأمر نفسه بخصوص عنصري المساحة والحجم. وفضلاً عن ذلك من المفروض أن يكون العدد الذي يقيس مجموعة من نقاط يستوفي الشروط الآتية، وهي شروط نرى بوضوح أنها مستوفاة من خلال الفكرة المبسّطة للطول والمساحة والحجم:

1) هو عدد موجب أو صفر.

2) يتمتّع بخاصة الجمع: قياس اتحاد مجموعات لا تقاطع بين أي اثنين منها يجب أن يكون مجموع قياساتها. ولكن في هذه النقطة تخصيص الاتحاد بأن يكون متناهياً أو قابلاً العدّ سوف يبرز حاسماً. أميل بوريل هو أولّ من أدخل شرط الجمع القابل العدّ، الذي استغلّه لوبيغ في نظريّته بخصوص القياس.

3) يجب أن يكون متساوياً بخصوص المجموعات المتطابقة.

---

(48) أي إنها غير كثيفة في أيّ موضع، بحيث إن ملتصقتها لا تتضمّن أي نقطة داخليّة.

في المحاولات الأولى لتعريف القياس، الذي أطلق عليه كانتور اسم «محتوى» المجموعة، كانت عناصر القياس لمجموعة من نقاط في R^n كُرات مغلقة، (وفي R مقاطع مغلقة)، منفصلة تغطّي مجموعة محدودة. مجموع «أحجامها» يتصاغر بصورة رتيبة عندما يؤول شعاعها نحو الصفر؛ نأخذ القياس على أنه الحدّ الأدنى لهذا المجموع. لكن هذا القياس ليس بجمعي : محتوى مجموعة النقاط النسبيّة في المقطع [0,1] سيكون 1، وكذلك سيكون محتوى النقاط الباقية أي الصمّاء 1، فبالجمع يكون محتوى المقطع [0,1] العدد 2.

في العام (1887) يحدّد بينو الشروط المطلوبة للقياس. وسيعرّف مع كميل جوردان القياس الخارجي والقياس الداخلي على أنهما على التوالي الحدّ الأدنى والحدّ الأعلى لمجموع «مجالات» المقاطع التي تغطّيها أو التي تحتويها. نقول إن مجموعة تقبل القياس إذا كان هذان القياسان يتطابقان، والشرط الطوبولوجي لقابلية القياس هو عندئذ أن يكون قياس تخم المجموعة صفراً. لكن هذا القياس غير مستمرّ، بمعنى أنه، إذا كانت متتالية من مجموعات E_k تؤول نحو المجموعة E فمن غير الضروري أن تؤول متتالية قياسات E_k نحو قياس E، هذا ما يجعله معتلاً بالنسبة إلى تعريف التكامل.

إميل بوريل هو من أدخل شرط الجمع القابل العدّ. انطلق من تحديد مسبق للمجموعات التي سنقول إنها تقبل القياس، وشدّد على المنحى العمليّاتي لهذه المواضيع. إنها فصيلة من مجموعات تسمّى قبيلة بوريلية، بحيث إن كل اتحاد قابل العدّ من مجموعات الفصيلة هو أيضاً مجموعة في الفصيلة، والأمر نفسه بخصوص الفارق بين أي مجموعتين في الفصيلة، وبالتالي التكملات. مثل هذه القبيلة يمكن أن تولّدها مفتوحات (المقاطع المفتوحة في المستقيم العددي على سبيل المثال)، فتتضمّن بالتالي المغلقات أيضاً، والمجموعة الخاوية والفضاء بكلّيته.

وفي النهاية أعطى هنري لوبيغ، في أطروحته في العام 1902[49]، تعريفاً بنائياً لقياس مجموعة، عن طريق مفهوم جديد للقياس الداخلي m^* والقياس الخارجي m_*، معرّفين بواسطة خاصّية الجمع قابل العدّ لبوريل. القياس الخارجي هو الحدّ الأدنى للمجاميع قابلة العدّ لأطوال المقاطع التي تغطّي المجموعة، والقياس الداخلي هو الحدّ الأعلى لمجاميع أطوال المقاطع الداخليّة للمجموعة. إذا وجدت المجموعة في مقطع (a, b) طوله L، كان لدينا $m^*(E) = L - m^*(c\ (a,b)\text{-}E)$، علاقة من الواضح أنها مستقلّة عن (a, b) وعن L. تكون المجموعة قابلة القياس وفق لوبيغ إذا كان قياسها الداخلي وقياسها الخارجي متطابقين. وفي هذه الحال يمكن التعبير عن العلاقة بين قابليّة الجمع البسيط، وفق بينو وجوردان، وبين قابليّة القياس وفق لوبيغ، على النحو الآتي: بخصوص كل مجموعة E تنتمي إلى عشيرة مجموعات قياس بسيط الجمع، إذا كانت A تقبل القياس وفق لوبيغ فإنّ: $m^* (E) = m^* (A \cap E) + m^* (CA \cap E)$. ونبرهن على أن كل مجموعة تقبل القياس وفق لوبيغ يمكن وضعها بين مجموعتين من قبيلة بوريلية قياس الفارق بينهما صفر.

4.3 ـ جميع المجموعات المعتمدة في التحليل هي عادة من قابلات القياس وفق لوبيغ: فعلى سبيل المثال، قياس مجموعة قابلة العدّ من نقاط هو صفر، والفترة قياسها هو طولها... عند هذا الحدّ استطاع الرياضيون أن يتساءلوا هل توجد مجموعات نقاط غير قابلة القياس وفق لوبيغ. والجواب إيجابي؛ برهن على وجودها بواسطة استخدام مبده الاختيار (فيتالي)، وبُنيت مجموعات كهذه، قدّم

---

(49) Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au collège de France*, 2e édition (Paris: Gauthier-Villars et cie, 1928), Paragraphe 3.

هالمس أحد أمثلتها (نظريّة القياس Measure Theory)، وكذلك ت. جيتش[50].

في هذا المثال الأخير يأخذ جيتش بعين الاعتبار، في المقطع [0,1] من الخط المستقيم، علاقة التكافؤ «x يتكافأ مع y» إذا كان الفارق y-x عدداً نسبيّاً. في كل طبقة تكافؤ، نختار عنصراً. مجموعة هذه العناصر لا يمكن أن تكون قابلة القياس وفق لوبيغ، لأنها إن كانت كذلك، نبرهن على أن قياس المقطع [0,1] يكون إما الصفر أو اللانهاية. لقد برهن سولوواي على أن بناء هذه المواضيع يرتبط جوهريّاً باستعمال مبده الاختيار[51]، وطرح نموذجاً لنظريّة المجموعات حيث كلّ مجموعة هي قابلة القياس وفق لوبيغ. تضيف هذه النظريّة إلى مباده زرمولو فرانكل مبدهاً جديداً، أضعف من مبده الاختيار[52] يبدو أن دور مبده الاختيار الجوهري، كما لاحظ جيتش في الفصل المشار إليه، يكمن في افتراض وجود موضوع أقصى. هذا ما يظهر بوضوح في التعبير المكافئ المسمّى بمأخوذ زورن: في مجموعة غير خاوية منظّمة جزئياً إذا كانت كل سلسلة تتمتّع بحدّ أعلى، عندها يكون في المجموعة نفسها عنصر أقصى.

من حيث فكرة الفضاء ماذا يعني عدم قابليّة القياس وفق لوبيغ؟

---

(50) «About the Axiom of Choice,» in: Barwise, *Mathematical Logic*, p. 352.

(51) مفارقة تارسكي باناخ ترتبط أيضاً بهذا المبده الذي يسمح بأن نبرهن على أنّ الكرة المغلقة يمكن أن تفكّك لعدد محدود من مجموعات منفصلة، بحيث يمكن إعادة تشكيلها للحصول على كرتين تتطابقان على التوالي مع الكرة الأولى. لكن هذه المجموعات ليست قابلة للقياس وفق لوبيغ.

(52) مبده الاختيار يقول بأنّ هناك بخصوص كل فصيلة من مجموعات غير خاوية، دالّة اختيار f حيث f (S) ϵ S، بخصوص كل مجموعة S في هذه الفصيلة. أو كذلك: بخصوص كل تشكيلة من مجموعات غير خاوية لا تقاطع بين أي اثنتين منها، هناك مجموعة لها بالضبط عنصر مشترك مع كل مجموعة في التشكيلة.

انه يتوافق مع تركيبة خاصّة، "مَرَضيّة»، تجعل من المستحيل الاستحضار المتناسق لدالّة عددية تعمل على المجموعات وتتمتّع بخاصّة الجمع[53]. بصورة ما، هذا الوضع الخاصّ هو حالة من نزع الفضائيّة الأقصى، الذي ليس له معنى إلا من منظور اختزال مجموعي للرّسوم. فضلاً عن ذلك، نفس مفهوم المجموعة غير الخاوية ذات القياس صفر، السند الأساسي في نظرية لوبيغ، هو مسبقاً في هذه الحالة. ولكن قبل هذا النزع الأقصى للفضائية، كنا قد رأينا أن سيرورة التشكيل الذي سبق وصفه لمتصوّر صوري للقياس يشمل:

1 ـ تحديد خصائص صوريّة أوليّة تتعلّق بمفهوم القياس (كانتور، بينو جوردان).

2 ـ اختيار قياس «مبسّط»، نموذجي، فضائي في الأساس، يستخدم كقاعدة لكل تعريف دقيق يطبّق على مجموعات أقل ابتذالاً: هو «القياس الهندسي» لفترة على مجموعة متريّة على أنه «طولها».

3 ـ تثبيت فصيلة المجموعات، المحدّدة طوبولوجياً، التي يطبّق عليها القياس.

---

(53) النظرية الحديثة لهندسة غير تبادليّة لمبتكرها آلان كون (Alain Connes) تفترض دراسة أفضية تظهر، من وجهة نظر قياس لوبيغ، على أنها مَرَضيّة. الحافز هو دراسة أفضية من دوال نافعة في توصيف بعض الظواهر الكوانتية. الفكرة هي في أن نربط الأفضية «بجبور معيّرة» من دوال، أو مؤثّرات، كان قد أدخلها فون نيومن. يبدو أنّ متصوّر الدالّة القابلة القياس المعمّمة عندئذ كخاصيّة تتمتّع بها عناصر جبر لفون نيومن، تبادليّة بالنسبة إلى قياس لوبيغ، لكنّها غير تبادلية في الحالة العامّة: «نظرية جبور فون نيومن تسمح بمعالجة قياس هذه الأفضية بطريقة مُرْضِية جداً»، انظر: Alain Connes, *Géométrie non commutative* (Paris: InterEd., 1990), p. 23.

ويلاحظ آلان كون بهذا الخصوص أن «نظريّة جبر (ر. ح. جبر) فون نيومن قد سبقت بمعنى من المعاني المعرفة الواضحة للمواضيع الهندسية التي تتطبّق عليها» (المصدر المذكور). وهذا مثال جيّد من الأخذ والعطاء بين الجبر والهندسة سبقت الإشارة إليه.

4.4 ـ ولكن علينا الآن أن نعيد باختصار رسم الطريقة الأخرى التي تطوّرت بمقتضاها نظريّة قياس صوريّة، لا كدالّة جمع على المجموعات، بل كداليّة تعمل على فضاء من دوال. وفق الطريقة الأولى، بُني متصوّر القياس بهدف التعريف الدقيق لمتصوّر التكامل. بدل أن نأخذ في الاعتبار شرائح المساحة المطلوب تربيعها موازية لمحور القيم y، منطلقة من تقسيم على محور القيم x، يأخذ لوبيغ في الاعتبار شرائح موازية لمحور القيم x، منطلقة من تقسيم على محور القيم y في الفترات $[y_i, y_{i+1}]$. في كل واحدة من هذه الشرائح قد تظهر نقاط حيث الدالّة المطلوب تكاملها f(x) تأخذ قيماً فعليّة y، هي بالتالي بين y_i وبين y_{i+1}. استطاع لوبيغ الذي أعطى معنى لقياس هذه المجموعات من النقاط، أن يعرّف التكامل كمنتهى مجاميع مضروبات القيم y_i بقياس المجموعة العائدة لكل منها.

الطريقة الأخرى هي تقريباً الطريقة المعاكسة. اكتشفها هـ. لوبيغ نفسه، وطوّرها كل من ف. رايس، ج. رادون، ب. ج. دانيال، ومن ثم لوران شفارتز، طريقة تتحدّد انطلاقاً من تعيين «وصفي»، أو إذا شئنا معياري، للتكامل ذاته. يعلن لوبيغ الشروط الأربعة الآتية التي تشكّل هذا التعريف:

1 ـ خاصة الجمع: $\int(f+g)dx = \int f dx + \int g dx$.

2 ـ خاصة الإيجابيّة: إذا كان $f(x) > 0$ في فترة التكامل [a, b] عندها يكون $\int f dx \geqslant 0$.

3 ـ المعيارية: تكامل الدالة الثابتة $f(x)=1$ هو $\int_a^b f(x)dx = b - a$.

4 ـ الاستمرارية: إذا كانت متتالية من الدوال f_n تؤول نحو الدالة f (x)، فإنّ المتتالية $\int f_n(x)dx$ تؤول نحو $\int f(x)dx$ فينقطع التكامل إذاً عن الظهور كتقييم مساحة بل كداليَّة خطية تحمل على

الدالة f(x)، والنتيجة هي عدد (في الحالة العامّة حقيقي أو مركّب) ترتبط قيمته بمجموعة القيم التي تأخذها الدالة f (x) على فترة التكامل. هو داليّة بالمعنى المألوف، أو شكل خطّي، يعمل على فضاء الدوال f، فقياس m، كحالة خاصة، يمكن أن يُعتبر هو نفسه كشكل خطي يطبّق على بعض الدوال. وبصورة أعم، بيّن ل. شفارتز، في تأسيسه نظريّة التوزيعات، أن فكرة الشكل الخطّي تسمح بإعطاء معنى دقيق لكائنات رياضية، غالباً ما أدخلها الفيزيائيون، بنجاح، ولكن بخلاف المتطلّبات المفروضة عادة، فعلى سبيل المثال، دالّة ديراك المزعومة، التي هي صفر بخصوص كل قيمة للمتغيّر x غير الصفر، وحيث يساوي تكاملها على مجموعة القيم x الواحد. في تصوريّة ل. شفارتز، من الواضح أن هذه ليست دالّة بالمعنى التقليدي، بل قياس. أي إنها دالّية خطيّة تعطي، عند تطبيقها على صنف ملائم من الدوال «الصحيحة»[54]، قيمة الدالّة في النقطة 0، هذا الذي يُكتب بلغة التكاملات على نحو $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_0 f(x) = f(0)$ ، ويُعبّر عنه حدسياً «ككتلة» واقعة في المصدر، أي النقطة 0، مساوية للواحد.

برهن رايس على أن كلّ شكل خطي مستمرّ على الفضاء المؤلّف من الدوال المستمرّة[55] ذات الركائز المدمّجة يمكن أن يماثل بقياس، محدّد وحيد. وبالتالي بالنسبة إلى ل. شفارتز، تعريف متصوّر القياس كدالّية خطّية هو الوحيد الأساسي:

«سوف تطالعنا من جديد عند الضرورة الدالّة كاملة الجمع من

---

(54) دوال مستمرّة ركائزها مدمّجة (صفر خارج مجموعة مدمّجة من قيم المتغير x).

(55) مفهوم الاستمراريّة يجب إعادة تعريفه هنا. طوبولوجية عاديّة على فضاء من الدوال لا تكفي بسبب تغيّر المدمّجات المستعملة ركائز.

المجموعات μ (A)، وذلك بالانطلاق من الداليّة μ (f)».

ويضيف، «خصائص μ أسهل للرؤية على μ (f) منها على μ (A)»[56]. إعادة الصياغة لتعريف متصوّر القياس مهمة بمقدار ما تسمح أن جاز القول بإبراز مفاهيم القياس والدالّة. والمتصوّر الأوسع هو متصوّر التوزيع، كشكل خطّي مستمرّ يعمل على فضاء الدوال اللامتناهية الاشتقاق ذات الركائز المدمّجة؛ بعض التوزيعات هي قياسات إذاً، إذا كانت معرّفة على الفضاء الجزئي المؤلّف من الدوال المستمرّة، والقياسات التي لها «كثافة»[57] ـ وهذه الأخيرة دالّة تقبل التكامل وفق لوبيغ[58] بالمعنى المعتمد، يمكن وضعها في تقابل واحداً لواحد ثنائي الدلالة مع هذه الدوال الكثافات. وإذاً يمكن أن نماهي كلّ دالة تقبل التكامل مع قياس وبالتالي مع توزيع خاصّ[59].

وهكذا خضع مفهوم القياس، الحاضر في الفكرة «الطبيعيّة» للفضائيّة الرياضيّة، لإعداد تظهر مرحلته الأخيرة المدروسة منزوعة الفضائية تماماً. وبإخراجه من الهندسة إلى نظريّة المجموعات وإلى التحليل، يبقى القياس مع ذلك واحدة من العلامات الفارقة في فكرة الفضاء الرّياضيّة، مندمجاً في البدء مع شكله التركيبي «الطبيعي» ـ الكمّية في الفضاء ـ ثمّ مجرّداً بالتدرّج، ثمّ معاد التركيب كمتصوّر رياضي كوني. هذا الحراك المزدوج لتجريد نازع للفضائية ولإعادة بناء هذا الأخير كمتصوّر مستقلّ هو ما سنتعرّف عليه في تفحّص مفهوم الفضاء الخطّي.

---

(56) Laurent Schwartz, *Théorie des distributions* (Paris: Hermann, 1950-1951), tome, I, p. 17.

(57) للقياس كثافة إذا وجدت دالّة f(x) بحيث إن: $\mu(\varphi) = \int f(x)\, \phi(x)\, dx.$

(58) شرط قابليّة التجميع يوسّع شرط قابليّة التكامل في حالة عدم حصر متغيّر التكامل.

(59) الأفضية من الدوال المنظور بأمرها هي أفضية خطيّة والأفضية المؤلّفة من الأشكال الخطّية العائدة لها هي الأفضية الصنوية، مفاهيم سيتم تفحّصها في الفصل القادم.

الفصل السابع
بنية «الفضاء» الخطي (المتّجهي) والتمثيل

لماذا نضع بين أهلّة كلمة «فضاء» في عبارة فضاء خطيّ؟ السبب كما سنرى هو أن الفضاء المتّجهي في الجوهر كائن جبري، أي منظومة عمليّات تحمل على مواضيع غير محدّدة[1] لكنها مع ذلك تتمتّع ببعض خصائص صوريّة بسيطة. والحال أن هذه المنظومات يمكن أن تستخدم كأدوات في اعتلام النقاط في رسوم فضائيّة. هذا الجانب المزدوج المتكامل من فضأنة ونزع فضأنة هو الذي سيشغلنا في توصيف الأفضية الخطيّة. حسب رأينا، سيضع أمام أعيننا بصورة مستمرّة مختلف إجراءات العلاقة البنائية بين العمليّة والموضوع في الكائن الرياضي. علينا قبل كل شيء أن نستذكر ونشرح خصائص متصوّر الفضاء المتّجهي. ومن ثمّ سنطرح ونتفحّص رياضيّاً وفلسفياً التطوّرات الهامّة لهذا المتصوّر الجبري الهندسي، التي عرضها حديثاً هيرمان غراسمان في نظريّات التوسّع. وفي النهاية سنحاول تفسير هذا النوع من تحرير تمثيل المواضيع استناداً إلى مرجعيّة، إلى قاعدة، وذلك في نظرية الموتّرات.

---

(1) العملية بالمعنى الجبري هي قانون تركيب داخلي يعمل على المجموعة E، ويعطي نتائج في E: op: ExE → E؛ أو خارجي بواسطة دالّيات على مجموعة أخرى F: op: ExF → E.

1 ـ الأفضية الخطّية والفضائية

1.1 ـ نعرف أن الفضاء الخطي هو مجموعة مواضيع غير محدّدة E مزوّدة بعمليّة تشاركية وتبادليّة لزمرة وتدوَّن جمعاً
$(a+b = b+a; (a+b)+c = a+(b+c))$,

مع وجود عنصر محايد يدوّن 0، ووجود مقابل (a-) لكل عنصر (a) بحيث $a+(-a)=0$، وتتزوّد المجموعة أيضاً بعمليّة خارجيّة مدوّنة ضرباً تشكّل مؤثّراتها جسماً K؛ بحيث يحصل لدينا بخصوص، α, β و1 في K وa وb في E: $\alpha (a+b) = \alpha a + \alpha b, \alpha (\beta a) = (\alpha\beta) a, 1a=a$. إذا كان جسم القاعدة K تبادليّاً، أمكن ألاّ نميّز عمليّاته من اليسار ومن اليمين. ونحصل على المتصوّر الأعم للميدال عندما تنحصر مجموعة المؤثّرات في حلقة[2] هذه المؤثّرات، التي هي في الحالات الأقرب إلى الفضائية الحدسيّة أعداد حقيقيّة، تسمّى «سلّميات» في مقابل «المتّجهات» التي هي مواضيع E. لكن هذا التمييز ليس أساسياً في الرياضيات، إذ لا شيء يمنع من أن نأخذ في الاعتبار جسماً ـ وهو زمرة جمعيّة ـ كفضاء خطّي على نفسه، أو أن نأخذ على سبيل المثال الزمرة الجمعيّة المؤلّفة من الأعداد النسبيّة كمِدال على حلقة الأعداد الصحيحة. وفضلاً عن ذلك، لا يقتصر مفهوم «المتّجهات» إطلاقاً على فضائيّة طبيعيّة بناء على حكم مسبق. وهكذا فإن مجموعة الدوال المستمرة العاملة من R في R تتمتّع بخصائص فضاء خطي على الجسم R نفسه.

---

(2) لنذكر بأن الحلقة هي مجموعة تتزوّد بعمليّتين تشاركيّتين، «جمع»، عمليّة على زمرة «تبادليّة» و«ضرب» توزيعي بالنسبة إلى الجمع ويتمتّع عرضياً بوحدة $1:1.a=a$. الجسم هو حلقة ذات وحدة ضربها يقبل النكس: بخصوص كل a ما عدا 0 يوجد a^{-1} وحيد حيث $a.a^{-1}=1$.

بكل تأكيد، تكوينيّاً، نقطة انطلاق مفهوم الفضاء الخطي هي تمثيل المتّجهات الهندسيّة في الفضاء العادي ثلاثيّ أو ثنائيّ الأبعاد، أي المقاطع المستقيمات الموجّهة التي توصل بين نقطتين في هذا الفضاء. يلغي التجريد منزوع الفضأنة المفضي إلى الموضوع الجبري تمثيل النقاط الفضائية والمستقيمات التي توصل في ما بينها. ويحافظ على «الجمع» والتوجّه، بمعنى أنه يعرّف مواضيع مضادّة، حيث المجموع يتساوى مع الموضوع المحايد، الذي إذا أضيف هو نفسه إلى اي موضوع آخر، تركه على ما هو عليه، ثابتاً. ويحافظ أيضاً على تمدّد وتقلّص المتّجهات في كونها ضرب المواضيع بالأعداد، أو بصورة أعمّ ضرب المواضيع بعناصر حلقة أو جسم. هذه البنية الجبريّة هي أداة اعتلام داخلي لعناصرها الخاصّة. لأننا نبيّن أن كلّ متّجه يمكن أن يمثّل بتوليفة خطّية وحيدة من متّجهات مختارة على نحو ملائم، مضروبة بمعاملات سُلميّة (عدديّة) التي هي مركّباتها.

في وجهة النظر هذه تبرز خاصّية بنية الفضاء الخطيّ فعلاً، على مستوى المدال ويمكن أن تكون الخصائص الضروريّة للاعتلام غائبة. ويُقال أن المِدال «من طراز متناه» إذا كان يوجد مجموعة منتهية من المتّجهات e_i بحيث إن كل متّجه في المِدال يكون توليفة خطّية عليها: $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ وعندها نطلق على هذه المتّجهات e_i اسم مولّدات المدال. لكن هناك مدالات لا تكون البتّة من طراز متناه: جسم الأعداد النّسبية هو مِدال على الحلقة Z المؤلّفة من الأعداد الصحيحة، لا يتمتّع بمجموعة منتهية من المولّدات (لكنه من طراز منته على الجسم Q نفسه مع مولّد واحد هو الوحدة). إذا أمعنّا في تعيين منظومة المولّدات موجبين أن تكون مستقلّة خطّياً[3]، عندها

(3) يعني أنه لا يوجد أي توليفة خطّية على e_i تساوي الصفر بخصوص معاملات ليست جميعها صفراً.

سيوجد بخصوص كل متّجه x مجموعة وحيدة من المعاملات α_i بحيث $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ ؛ وحينئذ يكون المِدال من طراز متناه، وتشكّل مولّداته قاعدة وتكون معاملاته α_i إحداثيّات المتّجه x. لكن هناك أمدلة من طراز متناه من دون قاعدة، أي من دون منظومة مولّدات مستقلّة خطياً[4]. ولكن بالمقابل، كل فضاء خطّي من طراز متناه يتمتّع دائماً بقواعد (هذا مرتبط بمنكوسيّة عناصر جسمه)، ولجميع هذه القواعد نفس عدد العناصر، هو عندئذ بعد ذلك الفضاء. نبرهن على أنّ جميع الأفضية المتّجهية منتهية البعد تتشاكل تقابليّاً في ما بينها، وهي بالتالي متشاكلة تقابلياً مع الفضاء النموذجي ذي الأبعاد n، الذي يشكّله جسم القاعدة، R^n بالذات. وهكذا تكون بنية الفضاء الخطّي (على الأقل في البعد المنتهي)، تسمح، بفضل خاصّية التمثيل الوحيد للمتّجهات، بأن نعلّم بصورة ثنائيّة الدلالة أيّ مواضيع تقبل التماثل شكلياً مع متّجهاتها.

1.2 ـ غير أن الفضاء الخطي يلغي التمييز الفضائي الطبيعي، التمييز بين المحلّي وبين الكلّي، فمنظومة المواضيع التي يعتلمها تطوف على نحو ما في فضاء غير محدّد حقيقي، من دون أي مرسى يثبّته. وبالتالي، مواضيعها أو متّجهاتها ليست في الحقيقة نقاطاً بالمعنى الفضائي الطبيعي. من المفيد أن نلاحظ بهذا الخصوص أن بناء متصوّر الفضاء الأفيني، برغم أنّه بناء لا يزال مجرّداً بحتاً، يكوّن سيرورة لفضأنة من جديد.

---

(4) على سبيل المثال، زمرة تبادليّة متناهية G يمكن اعتبارها كمِدال على Z، من نمط متناه. غير أنه لا يتمتّع بأيّ قاعدة. نفترض أن U_i هي هكذا قاعدة. في التدوين الضربي، لدينا إذاً $\forall x\in G\ x=u_1^{r_1}u_2^{r_2}\ldots u_n^{r_n}$ مع $(r_1\ldots r_m)$ في Z^n القول بأن U_i قاعدة، يعني أن الدالّة $G\to(r_1\ldots r_m)$ هي مقابلة. والحال أن Z^n غير متناهية، إذاً ستصبح G غير متناهية، وهذا مخالف للافتراض.

ننطلق إذاً من مجموعة E من مواضيع نسمّيها شرعاً من الآن فصاعداً نقاطاً، وندخل منظومة من المقابلات، تعمل من هذا الفضاء نحو هذا الفضاء نفسه، مطبّقة نقطة P على نقطة P’. وتعرّف علاقة تكافؤ هندسي بين هذه التحويلات النقاطية، من خلال التكافؤ الخطّي بين المتّجهات الهندسية P’P (في النظم وفي الاتّجاه وفي المنحى)، ونطلق على كل صنف من أصناف التكافؤ، بصورة طبيعيّة على نحو ما، اسم إزاحة، ويمكن أن تزوّد المجموعة T المؤلّفة من الإزاحات ببنية فضاء متّجهي على الجسم K، بتعريف الجمع على أنه ضرب إزاحتين مدوّناً s+t، وضرب سلّمي للنّظم. وكذلك سيدوّن، تجاوزاً تأثير الإزاحة على نقطة[5]، فتصبح المجموعة T عندئذ فضاء متّجهياً تعمل زمرته بالتعدية على E، أي إنه بخصوص كل زوج (A, B) من نقاط E توجد إزاحة s في T حيث s+A=B، تصنع الانتقال من A إلى B. كل إزاحة في الفضاء المتّجهي T يمكن أن تكتب كفارق بين نقطتين P′ P. والفضاء التآلفي المقترن بالفضاء المتّجهي T هو المجموعة E المؤلّفة من هذه النقاط مزوّدة بتطبيق $E \times T \to E$ بحيث إن:

- نتيجة العملية (s+t)+P، بخصوص كل s وكل t في T وكل P في E، هي s+(t+P)

(5) تجاوز يبرّره واقع أن النقاط تقبل التماثل مع الإزاحات من المصدر p_0. موبيوس، في **حسابه حول مركز الكتلة** (1827)، يستبق تصوّر الفضاء الأفيني بتمثيل كل نقطة في المسطّح بثلاثة أعداد تُربط برؤوس مثّلث يشكّل قاعدة. الفكرة هي أنه بخصوص اختيار ملائم للأعداد الثلاثة كأوزان تخصّص للرؤوس الثلاثة، نقطة ما في المسطّح تكون مركز الثقالة لثلاث نقاط وازنة. وبكلمات حديثة نرى بأن قاعدة مركز الكتلة تولّد منوّعة خطّية. انظر: Gilles-Gaston Granger, *Essai d’une philosophie du style*, éd. rev. et corrigée (Paris: O. Jacob, 1988), chap. IV, pp. 76 sqq.

ـ بخصوص كل P في E لدينا 0+p=p حيث 0 هو العنصر المحايد في T.

ـ بخصوص كل P وكل P’ في E، يوجد إزاحة وحيدة حيث $s + p = p'$.

إذاً نستطيع أن نختار بخصوص فضاء تآلفي معيّن أداة تعليم تسمح بتعاليم إن صح القول راسَيِة. لنفترض أن A فضاء تآلفي يعود لفضاء نقاط E ولفضاء متّجهي من إزاحات T بعدها n. نختار اعتباطياً نقطة P_0 في E وقاعدة $(e_1...e_n)$ للفضاء T. نطلق على هذا الزوج اسم معلم الفضاء التآلفي A. بخصوص كل نقطة P في E لدينا: $P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ والقيم ξ_i هي سلّمية (عدديّة) في T. لندخل النقاط $P_1......P_n$ حيث $P_i = e_i + P_0$ ولنفرض $\xi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i$ عندئذ نستطيع أن نكتب بخصوص كل P في E: $P = \sum_{i=0}^{n} \xi_i p_i$، المنظومة المؤلّفة من القيم ξ_i هي وحيدة بخصوص كل P؛ (تعلّم) النقاط P بالنسبة إلى الأصل P_0 والقاعدة e_i. نستطيع أيضاً أن نقول بأن إحداثيات النقطة P هي مركّبات المتّجه OP في القاعدة التآلفية للفضاء A.

يسمح متصوّر الفضاء الأفيني بالتالي بإعادة إدخال الأشكال الفضائية البحتة في المستقيم والمستوي. نعرّف عندئذ مفهوم المتنوّعة الخطّية (التآلفية) على أنها جزء من فضاء تآلفي، مجموعة V تتألف من نقاط بحيث أنه، إذا كانت النقاط $P_1...P_n$ في V وكانت السلميّات $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ بحيث إن $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$، عندها يكون لدينا $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = P$ في V. بخصوص كل نقطة P وكل نقطة Q، المتنوّعة الخطية المولّدة (الوليدة) $\lambda P + (1-\lambda) Q$ هي قطعة المستقيم PQ. بخصوص نقاط ثلاث مع $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$، المتنوّعة الخطّية المولّدة هي المستوي الذي يحتوي هذه النقاط، وبخصوص أكثر من ثلاث نقاط، المتنوّعة الخطّية المولّدة هي مستوٍ فائق (مستوٍ فارط). النقطة الوحيدة هي

أيضاً متنوّعة خطّية مضمحلّة، لأنه بخصوص $P_i = P$؛ $\lambda_1 = 1$ مع $\lambda_i = 0$ بخصوص $i \neq 1$، ولدينا إذاً $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = P$.

هكذا نجد أنّ ميزات بطبيعتها فضائية، ألغاها متصوّر الفضاء الخطي، تعود من جديد من خلال بناء جبري خالص للفضاء الأفيني. فضلاً عن ذلك، سبق أن رأينا[6] كيف أن زمرة تحويلات أفينية، محتفظة بمسطّح اللانهاية، تندمج في تراتبيّة الأشكال الفضائية وفق كلين.

1.3 ـ لنتبيّن الفضائية من خلال فضاء أفيني، مزيّة هامّة مرتبطة بأصله المتّجهي، هي الخطّية، فالنقاط حينئذ هي توليفات على شكل $ax_i + x_0$ حيث كل x_i نقطة وحيث x_0 هو المِعْلم، نتيجة للخاصّية الأساسية للفضاء المتّجهي المشترك. والحال أن الحركة الحاسمة في الرياضيات تقوم على محاولة اختزال كل دالّة في دالّة خطّية أو أفينية. وهكذا يصبح التحليل كله مرتكزاً على ميزة على افتراض خطيّة التغيّرات في الفضاء المحلّي اللامتناهي في الصغر، حول نقطة في الفضاء الكلّي. عندما يكون هذا الأمر ممكناً، نستبدل الدالّة، في هذا الفضاء المحلّي، «بتطبيق خطيّ مُماسٍّ. نفترض أن f دالّة معرّفة وتأخذ قيمها في أفضية متّجهية نظيمة تامّة[7]. في النقطة x_0 الدالّة $g(x_0) = f(x_0) + u(x- x_0)$ حيث u خطية، هي «تطبيق خطي مماسّ» على f إذاً وفقط إذا كانت الكميّة $\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|}$ تتقارب نحو الصفر عندما تؤول x نحو x_0. نبرهن على أنه يوجد، على الأكثر،

---

(6) انظر الفصل الثاني، الفقرة 3.3 من هذا الكتاب.

(7) نذكر بأن العيّار على فضاء خطي هو دالّة في +R تدون $\|u\|$ حيث $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ وحيث $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ ، $|\alpha|$ هي القيمة المطلقة للسلّمية a والصفر 0 هو المتّجه صفر.

في فضاء خطّي معيّر نستطيع أن نعرّف متتاليات كوشي، ويكون تامّاً إذا كانت كل متتالية تستوفي شرط كونسي تتقارب فيه (انظر الفصل الرابع، الهامش 8 من هذا الكتاب). =

بخصوص دالّة ما، تطبيق خطيّ مماسّ. وعند وجود هذا الأخير، نُرجع إذاً تغيّر $f(x_0)$ في اللامتناهي في الصغر، بواسطة الدالّة المماسة $f(x_0)+u(x-x_0)$، إلى تغيّر خطّي u، فبطريقة ما، يسلم التحليل إذاً بإمكانية اعتلام كل فضاء في اللامتناهي في الصغر، من خلال فضاء متّجهي. وسنرى كيف سيتعقّد ويثري هذا التمثيل مع المفهوم الحديث للمتنوّعة.

2 ـ فاصل تاريخي: إعداد غراسمان[8]

2.1 ـ إن نسختيْ نظريّة التوسّع لهيرمان غونتر غراسمان في العام 1844 والعام 1862، تسمحان في اعتقادنا بفهم أعمق لتكوين مفهوم الفضاء المتّجهي ومداه، كتخطيط لفضائيّة رياضيّة. سوف لا تلقى النسخة الأولى القبولَ الحسن، إذ اعتبرت ناقصة الدقة «وفلسفيّة على نحو مفرط»، كما أقرّ غراسمان نفسه في مقدّمة الطبعة الجديدة في العام 1877[9]، فحرر الأستاذ في ثانوية ستيتن، الذي لم يستطع الحصول على منبر في الجامعة، نسخة جديدة شديدة الاختلاف عن الأولى، ظهرت في العام 1862. كي نشرح ونوضّح نصّ الأولى، سنلجأ إلى الثانية عند الاقتضاء.

= [ملاحظة: في تعريف العيّار، يجب أن يكون لدينا بالإضافة إلى العلاقات المذكورة أعلاه، العلاقة: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$] (المترجم).

(8) كنت قد درست المؤلّف الهندسي لهيرمان غراسمان، بالإضافة إلى مؤلّف موبيوس وهاميلتون، من وجهة نظر الفوارق بين الأساليب في إدخال تصوّرات الفضاء الخطي. قصدي الحالي هو شيء آخر، لكنه يسمح لي بإرجاع القارئ إلى مؤلفي: Granger, *Essai d'une philosophie du style*, chapitre IV.

(9) نستشهد بغراسمان بناء على: H. G. Grassmann, *Mathematische und philosophische Werke* (Leipzig: [n. pb.], 1696-1911), A1 pour *l'Ausdenhnung* de 1844, A2 pour celle de 1862, *Géom* pour «Geometrische Analyse», prix de la société jablonovski pour 1846, publié à titre posthume.

هدف غراسمان هو بناء اختصاص مجرّد جدّاً وعامّ جداً، رياضيّات صوريّة بحتة، توازي المنطق على نحو ما. لكن الاختصاص الأخير يأخذ في الاعتبار «القوانين العامّة للفكر»، بينما الرياضيات البحتة، ونظرية التوسّع جزء منها، هي علم «المفرد». إن ما يقصده غراسمان بهذا المفرد ما هو إلا ما يمكن تعريفه «كشكل للفكر»: لهذا السبب كانت الرياضيّات هي نظريّة الأشكال»[10]. لكنه يبدو أن المقصود بذلك هو ما يشير إلى الميزة العملياتيّة الأساسية للمواضيع الرياضية. لأن الموضوع الذي يُعمل عليه والموضوع المستنتج هما، في ذاتهما، من المواضيع المنفردة، المستقلة، المختصّة. بالمقابل في الفلسفة كما في المنطق، نبحث «عن وحدة كل الأفكار»، بينما الرياضيات «تتّبع الاتّجاه المعاكس في كونها تتصوّر كل فكرة على أنها منفردة». بالتأكيد، إن غاية الرياضيات الصورية الجديدة هي تأسيس علوم رياضية متخصّصة، هي فوق ذلك تطبيقات للرياضيات البحتة؛ هذه هي حال الهندسة. لكن نظريّة التّوسع التي من المفروض أن تُؤسّسها، حتى وإن استعملت «تطبيقات» هندسية كتوضيحات ملائمة، يجب أن تكون «مجرّدة من أي حدس فضائي». مع ذلك يجب ألاّ تعتبر كنقل بسيط بلغة مجرّدة لقضايا هندسية؛ إنّ لها معنى أعمّ بكثير[11]، ففي هذه الرياضيات تكون حركة التجريد، وهي الحاضرة قبل ذلك فعلاً في الهندسة وفي علم الحركة وفي الميكانيك، قد توصّلت إلى نقطة توازنها، وهذه الحقول الرياضية المتخصّصة ليست سوى تطبيقات «لنظرية الأشكال على القواعد الحدسيّة للعالم المحسوس»[12].

---

(10) انظر ص 23 من المصدر نفسه. ابن هيرمان روبير نشر كتاب **صيغ رياضيّة**، الأب ج. جوستيس كان كاتب هندسة.

(11) A1، iii للعام 1877، ص 297 من المصدر نفسه.

(12) A1، ص 24 من المصدر نفسه.

النموذج الذي يطرحه غراسمان، منتقداً إياه، كان قد قدّمه لايبنتز، وكان على بيّنة على الأقلّ بمختصر الرسالة التي بعث بها إلى هويغنز في 8 أيلول/ سبتمبر 1769 التي كانت قد قدّمت وشُرحت في التحليل الهندسي في 1846[13]، فبعد أن طوّر بعض الجوانب الجديدة في نظريته في التوسّع، التي سيعاود العمل عليها في العام 1862، يستخلص بأن مشروع لايبنتز، رغم النواقص التي يراها فيه والتي يعتقد أنه أوجد لها علاجاً، يوضّح «بصورة صحيحة الفائدة الذاتية من تحليل هندسي بحت»[14]؛ أي نظريّة أساسيّة بحتة في الموضوع الهندسي.

2.2 ـ في نسخته الأولى يطرح غراسمان أوّلاً نظريّة «فلسفية» حول أنواع المقادير التي كانت تشغل الرياضيين في كونها علوماً مختصّة تتميّز فعلاً بأنماط إنتاجها وبطبيعة عناصرها. من وجهة نظر النتاج، تتعارض المقادير المتقطّعة مع المقادير المتواصلة، أو المقادير بالمعنى الحصري، فالمقدار المتواصل نتاج عملية وضع بسيطة، والمقدار المتقطّع نتاج عملية مزدوجة في الوضع وفي الصلات بين المواضيع. من وجهة نظر طبيعة العناصر، يميّز غراسمان بين نوعين من الأشكال: الجبري، الذي تترتّب عناصره وفق المساواة، والتوليفي، الذي تترتّب عناصره وفق الفارق. يلاحظ غراسمان أن هذا التمييز هو، فوق ذلك، غير مطلق. غير أن تقاطع الضدّين يولّد أربعة أنواع من المقادير.

---

(13) Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften und der Briefwechsel mit Mathematikern*, II, p. 20.

(14) René Descartes, *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (Paris: J. Vrin, 1964-), vol. 2: *La Géométrie*, vi, p. 396.

	نتاج متقطع	نتاج متواصل
طبيعة جبرية	عدد	مقدار غير امتدادي
طبيعة توليفية	توليف	مقدار امتدادي

المقدار المتقطّع، وفق طبيعة عناصره، هو عدد أو توليف، مواضيع نظريّة جبريّة أو توليفيّة للمتقطّع. المقدار المتواصل، بالمعنى الحرفي وفق غراسمان، يظهر إمّا في شكله الجبري كمقدار غير امتدادي، مؤسِّساً نظرية للدوال والتحليل، أو في شكله التوليفي كمقدار امتداديّ. وفي هذا الشكل الأخير، في النظريّة الصورية للفضائية التي تؤسّس الهندسة وعلم الحركة والميكانيك، يشار إلى العناصر بعلامات متمايزة، كالخطوط في الهندسة والحروف في التوليفيّة. وفي رياضيات المقدار الامتدادي، على عكس ذلك لا نخصّ بعلاقة إلا المقدار في كليّته[15].

هذا التصنيف يفصل إذاً النظرية الصوريّة التي تؤسّس الهندسة عن النظريات التي تؤسّس أجزاء الرياضيات الأخرى. ولكن «من الواضح أن كلّ مقدار حقيقي يمكن اعتباره كمتكثّف امتدادي أو غير امتدادي»[16]. لكن المقدار في كونه امتدادياً هو ما يكوّن شكل الموضوع الهندسي.

2.3 ـ المدلول الصوري البحت للمواضيع الهندسية هو إذاً نابع من عمليّة متواصلة أساسيّة اسمها: التغيّر. يجب أن يُفهم ذلك بقطع النظر عن المعنى الحدسي، المفضأن سابقاً، في المرور من نقطة إلى أخرى من دون فجوات، كتغيير مجرد ينقل من عنصر إلى آخر، وفق

(15) Grassmann, *Mathematische und philosophische Werke*, A1, *Einleitung*, pp. 22-28.

(16) المصدر نفسه، ص 27.

«حراك» من خلال جميع العناصر «الوسيطة». نقطة التطبيق الأولى، مثل الوسائط، هي نقاط، وهذه الكلمة لا تشير أبداً إلى إفرادية في المكان، بل إلى عنصر مجرّد، «المفرد» البحت البسيط، الذي نفكّر فيه كمتميّز عن بقيّة الأفراد، من دون أي صفة. الانتقال من نقطة إلى نقاط أخرى متمايزة هو ما يُسمّى التغيير، شكل مجرّد للمفهوم الحسّي لتغيير المكان في اتّجاه ثابت. نتيجة هذه العمليّة تسمّى «Stecke»، التي نترجمها بكلمة سحبة بدل مقطع مستقيم، بسبب نمط إنتاجها وصفتها المجرّدة[17]. هذا امتداد أساسي من المستوى الأول. مجموعة العناصر، أو النقاط، التي تجوبها السحبة في اتجاه أو آخر تكوّن «منظومة» أو مجالاً من المستوى الأول. وبصورة أعمّ، المجال هو مجموعة من العناصر من مستوى محدّد يحدث من خلال تغيير أو مضادّة، فعلى سبيل المثال، التجسيد الهندسي لمجال من المستوى الأول هو إذاً مجموعة نقاطه ومجموعة القطع الخطّية المتناهية (أو المتّجهات) التي يحملها نفس المستقيم[18].

نحصل على مجالات المستوى الثاني بتوليف عمليّتي تغيير من أنواع متمايزة (بتعذّر اختزال إحداها في الأخرى، غير متوازيتين)، فنقوم إذاً بتغيير من النوع الأوّل على كل عنصر أو نقطة من النوع الثاني، فنحصل هكذا، انطلاقاً من النوع الأوّل، على مجموعة غير متناهية من نقاط جديدة تشكّل مجالاً من المستوى الثاني[19].

بخصوص الفضاء الهندسي:

«كل نقطة في مقطع مستقيم تعرّف قطعة مستقيم (من نوع غير

---

(17) أمّا في التطبيقات الهندسيّة فإننا بالأحرى نقول: مقطعاً مستقيماً.

(18) المصدر نفسه، الفقرة 14، ص 49.

(19) المصدر نفسه، الفقرة 16، ص 52.

نوعها) بحيث إن جميع نقاطه تشكّل قطعة مستقيم مساوية. وعنصر السطح الذي يُبنى هكذا هو متوازي أضلاع»[20].

يبنى المسطّح وهو المستوى الثاني، إذاً كمجموعة متوازيات تنطلق من نقاط مستقيم، فنرى أن التغييرين المتمايزين اللذين يولّدانه يتطابقان مع بُعدَي هذا الفضاء. وبتعميم عمليّة التولّيد هذه، من خلال تطبيق على مجال من مستوى n لتغيير متمايز عن التغييرات التي أنتجت هذا المجال، نحصل فوراً على مجالات المستوى n+1.

في كل مجال من مواضيع يبنى من خلال عمليّة التغيير على هذا النحو نعرّف عمليّات ـ إن صحّ القول ـ داخليّة، هي قوانين التركيب: جمع، طرح، وضرب بالأعداد توزيعي بالنسبة إلى العمليّات الأولى. عندئذ يُبرز غراسمان الحافز الأصلي لمتصوّر المجال، الذي يتطابق مع الخاصّة الأساسية لما سنطلق عليه في ما بعد اسم الفضاء الخطّي. ولكي نعبّر عنه يجب أن ندخل مفهوم الاستقلالية : يكون تغييران مستقلّين إذا كان يتعذر اختزال أحدهما في الآخر، وتكون سحبتان في المستوى الأول، مولّدتان من خلال تغييرات متمايزة، مستقلّتين إذا كان التعبير عن واحدة منهما من خلال الأخرى بواسطة العمليّات السابقة غير ممكن. ونبرهن عندها على أن مجالاً من مستوى m يمكن توليده كاملاً من خلال تبدلات متمايزة عددها m تكون منتمية إليه ومستقلة في ما بينها، ممّا يعني أيضاً: انها لا تنتمي مجتمعة إلى نفس مجال من مستوى أقل من m. وهذا مصاغ أيضاً على نحو أكثر وضوحاً في الطرح التّالي:

«كلّ سحبة في مجال من مستوى m يمكن التعبير عنها، وبطريقة وحيدة، كمجموع سحبات عددها m تنتمي إلى

(20) المصدر نفسه، الفقرة 18، ص 77.

تغييرات مستقلّة في هذا المجال عددها n»[21].

عندئذ أدخل غراسمان مفهوم «المنظومة الابتدائية» انطلاقاً من الاستقلاليّة، المنظومة الابتدائية من المستوى m هي مجموعة من العناصر ترتبط بعناصر عددها m، مستقلة في ما بينها[22]. بحيث إن استقلالية عناصر في ما بينها عددها n تعني بالمقابل أنها لا تنتمي إلى أي منظومة ابتدائية من مستوى أصغر من n. في الهندسة، على سبيل المثال، النقطة A والنقطة B، في كونهما متمايزتين، هما بالطبيعة مستقلّتان، نقاط مقطع مستقيم AB هي بالمقابل غير مستقلّة، بما أن هناك عدداً α وعدداً β بحيث $\alpha+\beta B = 0$، إذا كان اختيار العدد α والعدد β بحيث $\alpha+\beta = 1$، فالمقصود إذاً بعبارة حديثة هو المتنوّعات الخطّية. من وجهة النظر هذه، النقطة والعنصر في خطّ والعنصر في مسطّح والعنصر في الفضاء هي من «المستويات» واحد واثنين وثلاثة وأربعة على التوالي[23]، هذه الأعداد تتطابق مع عدد نقاط المعْلم الأفيني الذي يعرّف متنوّعة هذه العناصر. لكن من وجهة نظر التولّد، الخطّ والمسطّح والفضاء هي من المستوى واحد والمستوى اثنين والمستوى ثلاثة على التوالي[24]، وهذه الأعداد تتطابق مع عدد أبعاد الفضاء المتّجهي لكل منها. غير أن غراسمان يستعمل لسوء الحظّ نفس الكلمة «مستوى» للدلالة على هاتين الميزتين، بحيث إنه يقول في مكان بأن الفضاء بكامله هو من مستوى ثلاثة[25]، ويقول في مكان آخر إنه من مستوى أربعة[26].

---

(21) المصدر نفسه، الفقرة 20، ص 62.

(22) المصدر نفسه، الفقرة 107، ص 176.

(23) المصدر نفسه، ص 189.

(24) النقطة ستكون إذاً من المستوى 0، لكن غراسمان لا يحدّدها.

(25) المصدر نفسه، ص 66.

(26) المصدر نفسه، ص 189.

ندرك كيف أن التعاريف الواردة في النسخة الأولى التي هي «فلسفية» أكثر ممّا هي رياضيّة، مع مفهوم «التغيير المتواصل» و«السحبة» لم يستسغها المعاصرون، لكن غراسمان في النسخة الثانية في العام 1862، سوف يتحدّث بكلمات أكثر وضوحاً، هي على وجه التقريب كلماتنا اليوم.

لعلّ قراءة موبيوس ومعرفة نظريّات العدد العقدي الهندسيّة (التي كان يجهلها في العام 1844) أوحت له أن يستعمل بصورة جوهريّة متصوّر «التوليف الخطّي» من المقادير الامتدادية، المتصوّر الذي عرّف وطوّر في الفصل الأول، الفقرة 1 من المؤلّف الجديد، ثمّ مفهوم الاستقلاليّة الخطّية المعاد تعريفه بوضوح انطلاقاً من المقدار الامتدادي، فالفكرة العامّة للمقدار الامتدادي كان إدخالها إذاً كتوليف خطّي من وحدات، باعتبار أنّ منظومة الوحدات هي مجموعة مقادير مستقلّة خطّياً تولّد المجال[27].

نرى أن جوهر متصوّر الفضاء المتّجهي حاضر في أعمال غراسمان، حتّى وإن لم يقم بإبراز أهمّية الجسم في مجموعة السلّميات، التي كانت حينئذ بكل بساطة الأعداد الحقيقية. فضلاً عن ذلك، كان رياضيّ ستيتن، بمعنى حدسي أيضاً، مدركاً للعلاقة بين بنية المقدار الامتدادي المجرّدة وبين المواضيع الفضائية الزمانية للهندسة والميكانيك، التي لم تكن بالنسبة له سوى «تطبيقات على بديهيّات العالم الحسّي»[28]، فالمحتوى الحدسي للتطبيق لا يشكّل إذاً من خلال نظريّة التوسّع بل من خلال المباده الخاصة بكل اختصاص.

2.4 ـ نظريّة التوسّع هي إذاً مذهب شكليّ بحت، كما سيكون

---

(27) المصدر نفسه، A2، ص 12.

(28) المصدر نفسه، ص 6.

لاحقاً الجبر الخطّي الذي تحدّر منها. لكي نزيد في إبراز هذه الميزة، سيكون من الملائم أن نعود إلى متصوّر العمليّة نفسه الذي يعطي هذه الميزة كلّ معناها.

إن الرياضيات وفق غراسمان صوريّة لأنها تعالج عمليّات تحمل على مفردات، متمايزة لكنّها في الأصل خاوية وحياديّة. لذلك يكون إدخال العمليّات دائماً من خلال خصائصها الصوريّة المحضة: جمع المقادير من نفس المجال كتجميعي وتبادلي[29]، والتوسّع والاقتصار (الاختزال) بواسطة عدد كتوزيعي بالنسبة إلى الجمع. عندئذ تظهر عمليّة هامّة وخصبة على نحو خاصّ اسمها الضرب. النموذج الأصلي في ذلك هو العمليّة الأساسيّة للتغيير البسيط، الذي يحدث سحبة انطلاقاً من نقطة. لكن المفهوم الأعم للضرب ينطلق من موضوعين من نفس المستوى n (في ذات المجال) ، ويعمل أحدهما على الآخر، فنحصل كنتيجة على موضوع من مستوى n+1، بتعزيز مستوى المواضيع بوحدة. هذه العمليّة تسمّى «الضرب» لأنها تتمتّع بالنسبة إلى الجمع بالخصائص الصوريّة للضرب الحسابي[30]. لكن خاصّية صوريّة جديدة تظهر فوراً على حالة التغيير بالذات: محمولاً على عنصرين من نفس النوع، مشتقين من نفس التغيير، يجب أن يكون الضّرب لا شيء. وبالفعل، إنّ التغيير مطبّقاً على سحبة وفق سحبة من نفس النوع [غير مستقلّة، في هندسة مقطع مستقيم مواز لها] لا يعطي أي نتيجة جديدة. غراسمان يصف هذا النوع من الضرب بالخارجي لأنه لا يعمل إلا عندما يكون الموضوعان المعمول عليهما «خارجيّين» الواحد عن الآخر، من نفس المستوى

(29) المصدر نفسه، *Einleitung* A1 .

(30) المصدر نفسه، A2، no. 78، ص 56.

لكن مستقلّين. يبرهن غراسمان عندئذ، على نحو صوري تماماً، أن هذه الخاصّة تقتضي خاصّية التناوب: تبديل ترتيب المضروبين يقتضي قلب اتّجاه النتيجة[31]. سيكون لهذا المتصوّر ولاسم «الضرب الخارجي» نفسه عاقبة خصبة في الجبر وفي التحليل، مع نظريّة الجبر الخارجي والأشكال التفاضليّة.

لكن غراسمان سيعطي في النسخة الثانية معنى أعمّ لمتصوّر الضرب الخارجي. يعرّف المقدار الامتدادي عندئذ كتوليف خطّي من وحدات، وستكون المضروبات من المقادير الامتداديّة توليفات خطّية من مضروبات هذه الوحدات، وستعرّف مختلف أنواع المضروبات من خلال جداول ضرب الوحدات $\Sigma\alpha_r e_r . \Sigma\beta_s e_s = \Sigma\alpha_r\beta_s[e_r e_s]$. والحال أننا نستطيع أن نضفي على مضروبات الوحدات $[e_r e_s]$ شكلين فقط، متمايزين جوهريّاً: أمّا أن تكون لا شيء إذا كانت $r=s$، وفي هذه الحال يكون لدينا أيضاً $[e_s e_r]$ ـ = $[e_r e_s]$، هذه هي حال الضرب الخارجي المسمّى عندئذ على نحو أعم «الضرب التوليفي»، أو $[e_r e_s] = [e_s e_r]$، تبادليّة تتحقّق في حالة الأعداد العقدية.

وهكذا نجد مسبّقاً لا فقط متصوّر الفضاء الخطي، كأساس هندسة مجرّد جداً، بل كذلك تطوير جبر خطّي ومتعدّد الخطّية، الذي سينزع الفضائيّة أكثر فأكثر عن مفهوم المقدار الامتدادي.

3 ـ مواضيع جديدة متعدّدة الخطّية في الأفضية المتّجهية

3.1 ـ ميزة متصوّر الفضاء الخطّي هي السماح بتمثيل وحيد الدلالة للمواضيع بواسطة مركّبات تتحدّد في قاعدة لهذا الفضاء من

---

(31) المصدر نفسه، A1، الفقرة 35، ص 87.

خلال إحداثيات، أعداد أو بصورة أعمّ عناصر جسم. والحال أن لهذه المواضيع نوعاً من الوجود الخاصّ، المستقلّ عن قيم هذه المركّبات التي تتغيّر عند التغيير الاعتباطي لمرجعيّة القاعدة. والفائدة الرياضيّة للمواضيع الطبيعيّة في فضاء خطي، أي المتجهات، هي في أن بعض خصائصها وعلاقاتها مستقلّ عن تمثيلها في هذه القاعدة أو تلك. وعلى سبيل المثال، نذكر توازي أشكالها في فضاء أفيني؛ لذلك نستطيع أن نمثل ونعالج الظواهر الميكانيكيّة بالاستدلال المباشر على المتّجهات التي تحدّد الحركة، فمثلاً تعرّف الحركة المركّبة البسيطة لنقطة تتنقّل في مجسّم مستقل الحركة، وبالنسبة إلى معلم ثابت، بواسطة Je متّجه التسارع النسبي لنقطة ثابتة في مجسم متحرك، و Jr متجه التسارع النسبي لنقطة متحرّكة بالنسبة إلى معلم ثابت في مجسّم متحرّك ومتّجه تسريع مكمّل أو «كوريوليسي» يرتبط بمتّجه السرعة النسبية Vr لنقطة متحرّكة بالنسبة إلى مجسّم متحرك، وw متّجه يحدّد دوران المجسّم المتحرّك بالنسبة إلى معلم ثابت، فيتحدّد التسارع المطلق للنقطة بمجموع المتّجهات: $J_a = J_e + J_r + (\omega \wedge v_r)$ ، حيث العلامة ∧ تمثّل الضرب (الجداء) الخارجي لمتّجهين. وهذه علاقة بين متّجهات بالطبع صالحة بصورة مستقلّة عن اختيار المعلم الثابت والمعلم في المجسّم المتحرّك. وتتطلّب الحسابات الفعليّة للمقادير الهندسية والميكانيكية بطبيعة الحال، التعامل مع مركّبات في معالم مختارة سلفاً.

نرى إذاً أن تغيّرية مركّبات المتّجهات لا تتعارض مع ميزتها الذاتية، إذ إن تغيّر المركّبات بفضل الخطّية في الأفضية المتّجهة، يتمّ وفق قوانين بسيطة نطلق عليها صفتي التغايريّة والتغايرية المضادّة. لنأخذ في الاعتبار قاعدة e_i وقاعدة جديدة يعبّر عنها e'_i خطّياً من خلال الأولى على نحو: $e'_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3$ ، وهو ما نكتبه

بصورة بسيطة مستعملين مصطلح إينشتاين[32] : $e'_i = a_i^j e_j$. بفضل الخطّية، إذا كانت المحدّدة A للمصفوفة (a_i^j) لا تساوي صفراً، يكون لدينا بصورة معاكسة القاعدة القديمة من خلال الجديدة على نحو: $e_i = b_i^j e'_j$ ، مع $b_i^j = \frac{A_j^i}{A}$ ، حيث A_j^i هي معامل a_i^j في تفكيك المحددة. وفي هذه الحال نتحقق فوراً من أن x^i مركبات المتجهات في الفضاء، تتحوّل، في هذا التحويل، إلى منكوس متجهات القاعدة؛ $x'^j = b_j^i x^j$ ؛ فنقول عنها إنّها متغايرة ضدّياً. وبالمقابل تتحوّل مركبات متجه التفاضل dx_i، على سبيل المثال، كما متجهات القاعدة؛ ندوّنها بواسطة مؤشرات من أسفل: $dx'_i = a_i^j dx_j$ ؛ ونقول بأنها متغايرة.

تنتمي المتّجهات المتغايرة في الحقيقة، إلى الفضاء الصنوي للفضاء e_i، فضاء الأشكال الخطّية، التي هي مؤثّرات تعمل من الفضاء على الأعداد في جسم القاعدة K، لكنها تشكّل أيضاً فضاء متّجهياً له نفس البعد.

3.2 ـ قادت مسائل تخطيط الظواهر الميكانيكية، نظيرة تمثيل القيود داخل مجسّم من خلال دالّة، إلى أن نأخذ في الاعتبار مواضيع رياضيّة تعرّف على مضروبات من الأفضية المتّجهية وأضوائها (جمع ضوّ)، مركّبات الموضوع في مختلف هذه الأفضية تتحوّل خطياً، عند تحوّل أي مرجع من مراجع المضروبات. وهكذا يسلّط، في مجسّم متواصل، يفترض أنّ مستوياً يقطعه، حقل من قوى الروابط يؤثّر على عناصر مساحة سطح التّماس: هو حقل متّجهات. لكنّ مجموعة القيود في جميع المسطّحات المارّة في نفس

(32) الرموز تحمل مؤشّرات من أسفل ومن أعلى، يجب أن نقوم بجمع مضروبات الرموز التي لها نفس المؤشّر من أسفل ونفس المؤشّر من أعلى، بخصوص القيم من 1 إلى n لهذه المؤشّرات في فضاء عدد أبعاده n.

نقطة من المجسّم يمثلها مؤثّر معرّف في الفضاء المتّجهي، حيث تقع النقطة وفي الفضاء المتّجهي المشكّل من الوسائط الثلاثة المحدّدة لكل مستو، فلهذا المؤثّر إذاً تسعة مركبات، غير متمايزة بالضرورة، وهذه المركبّات تتحوّل خطّياً كما تتحوّل متّجهات المعالم في الفضاءين المتّجهيّين، فذلك المؤثّر هو مؤثّر من الرتبة الثانية ومركّباته تدوّن من خلال مؤشّرين من أسفل T_{ij}. إذا كانت المعالم تتحوّل وفق القوانين $u'_i = a^i_i u_j$ و $v'_i = b^i_j v_j$ فإنّ مركبات ذلك المؤثّر تتحول وفق $T_{kr} = a^i_k b^j_r T_{ij}$، في البداية أخذ هذا القانون في التحويل المتعدّد الخطّية للمركّبات كتعريف للموتّر. ثمّ حدّد الرياضيون جوهريّاً الموضوع ـ موتّر كمؤثر يعمل بصورة متعدّدة الخطّية من حاصل ضرب الأفضية المتّجهيّة التي عرّف عليها، نحو جسم القاعدة المشترك. مزدوجات الأفضية تؤدي عندئذ إلى تحويلات متغايرة؛ لنفرض الموتّر المعرّف على فضاءين متّجهين وصنويهما، ستكون المركّبات السلميات T^{ij}_k مرّة متغايرة ومرّتين متغايرة ضدّياً. وسنجد التعريف السابق باعتبار مركّبات الموتّر السلّمية كنتائج التطبيق في جسم القاعدة.

من وجهة النظر هذه، تكون المتّجهات نفسها موتّرات من الرتبة الأولى، مع تحوّل المتغايرات ذات المركّبات x_i كتحوّل كما متّجهات قاعدة الفضاء الأساسي، أمّا المتغايرات ضدياً ذات المركّبات x_i فتتحول كما متّجهات قاعدة صنو الفضاء السابق.

يشهد التعريف المثنّى للموتّرات مرّة أخرى، على الترابط العميق في الرياضيّات بين العمليّة والموضوع، فالتعريف من خلال المركّبات، وهي مواضيع عدديّة [أو عناصر في جسم]، يدخل قوانين تحويل يعمل على القواعد. والتعريف الحالي، يحدّد الموتّر كموضوع ذاتي، لكن مع مماثلة هذا الأخير نفسه بمؤثّر.

تظهرالمواضيع الجديدة الموتّرية بمعنى من المعاني متحرّرة من

اختيار المعالم اختياراً اعتباطياً في الأفضية المتّجهيّة، حتّى وإن كانت الحسابات الفعليّة للمقادير تتمّ على مركّباتها في تلك المعالم، فيجوز إذاً نشر استدلالات جوهريّة بشأنها من حيث إنّها مواضيع ذاتيّة غانمة على نحو ما، ميزة هندسية ملموسة. لذلك سيصبح استعمالها النظري جوهريّاً في النسبيّة بما يتعلّق بصياغة الخصائص المكوّنة للفضاء ـ الزمان ولمحتواه من الطاقة. بحيث إن الجبرنة القصوى النازعة للفضائية تلك التي أنتجت الموتّرات ستقدّم للفيزيائي أدوات تجديد الفضأنة في بُنى مجرّدة، وفي مستوى الرياضيّات بالذات، سوف نرى عند تفحّص متصوّر المتنوّعة، أن الموتّرات ستبرز كأدوات ملائمة لتعريف المتريّة.

الفصل الثامن
متصوّر المتنوّعة

بني متصوّر المتنوّعة، الذي أدخله بوانكاريه واضحاً ومهّدت له أعمال كل من غاوس وريمان، بهدف إقامة أساس صحيح لنظريّة واستعمال حساب التفاضل على أفضية عامّة جداً. لكنّه يظهر أيضاً، من وجهة النظر التي تهمّنا، كتعبير عن سيرورة إعادة بناء تحصيلي للفضائية، من المؤكّد أنّه مجرّد جداً و«جبري» جداً، لكنّه يوفّي أيضاً بشروط اعتلام تتطلّبها مواصفات طوبولوجيّة وتقتضيها ضرورات قياس متماسك للمقادير الهندسيّة، فهو ينتمي إذاً إلى حركة تجديد الفضأنة ـ أي استرجاع مفاهيم فضائيّة «طبيعيّة»، لكنّه ينتمي في الوقت نفسه إلى الحركة التي يتلازم فيها نزع الفضائية والجبرنة (بالمعنى العامّ) للفضاء الرياضي. أوقات وأوجه هذا البناء هي التي سنحاول إبرازها في هذا الفصل. وسنتخذ كمدخل النظر في مفهوم سبق أن صادفناه هو البعديّة. ثم سندرس الخطوط الرئيسيّة لنظريّة السطوح، كديباجة لنظريّة المتنوّعات، وسنعلّق على نصّ ريمان المؤسّس لها. وبعد ذلك، سيشكل تقديمنا لأصول هذا المفهوم الأخير ووظيفته وبنيته، جوهر الفصل.

1 ـ البعدية

1.1 ـ ينتمي مفهوم البعديّة إلى متصوّر رياضي «طبيعي»

للفضائيّة، أي إنه تحصيلي، لا ينفصل عن التجربة الحسيّة، ويمكن تطبيقه فوراً عليها. والحال أن تاريخه هو تاريخ تحليل في شكل متصوّرات تعود إلى أشكال فضائيّة أكثر تجرّداً. لكنّه أيضاً تحليل إعادة تركيب من خلال دمج أوجه طوبولوجيّة ومتريّة كانت قد فصلت سابقاً. سنتفحّص الحالات الثلاث الأساسيّة لهذا التفكيك وإعادة التركيب: الأولى على مقربة من الحدس برغم أنّها جدّ مجرّدة وتتعلق بدالة اعتلام المواضيع الفضائيّة، والثانية ترتكز على الخصائص الطوبولوجيّة للفضاء، والثالثة تعاود دمج الخصائص المترية.

2 ـ البعدية والاعتلام

2.1 ـ تتعلّق البعديّة، إذاً في شكلها الحدسي كمفهوم بصفة قصوى، بعدد الحركات التي لا يمكن اختزالها بحيث إن توليفها يكفي للانتقال من نقطة إلى أخرى في الفضاء المأخوذ في الاعتبار، فعلى سطح ملموس يكون البعد 2، وفي الفضاء التامّ كما يدركه شخص هو 3 ويعبر عن هذا الوجه من البعدية بأسلوب مجرّد ومبدّه من خلال متصوّر الفضاء الخطي، أو الفضاء الأفيني من باب أولى. يعتلّم الموضوع الأوّلي في هذا الفضاء («نقطة» أو «متّجه») بصورة كاملة بواسطة منظومة من n موضوعاً مختارة كقاعدة، وذلك بمعرفة مقادير إحداثيّات عددها n، هي أعداد، أو عناصر في جسم بصورة أعمّ، تتعلق بدرجات حريّة الحركة. والميزة الأساسيّة «للفضاء المتّهجي» المعرّف تبديهياً تسمح فعلاً، كما رأينا، بإعطاء معنى محدّد للفكرة الحدسيّة لاستقلاليّة مواضيع القاعدة وأحاديّة تمثيل الموضوع من خلال آبل أعداد من رتبة n.

2.2 ـ يظهر متصوّر البعديّة هنا كجبري محض، لا يدخل سوى عمليّات على مواضيع مجرّدة، متّجهات أو عناصر في جسم القاعدة، حتّى وإن كان التأويل العددي المألوف لهذه العناصر يدخل

ظاهر قياس. وفضلاً عن ذلك يظهر التوجّه النازع للفضائية بتفكيك واختزال المتصوّر وذلك بوضوح، في إمكانيّة اعتبار أيّ عدد من الأبعاد بعيداً عن الهدف الأصلي من فضائية قريبة من الحدس. إلاّ أنّ مركّباً في الأصل أكثر ملموسيّة يبدو ضمنياً في متصوّر البعديّة والاعتلام. هذا ما رآه ديكارت وفسره كطريقة قياس، فموضوع ذو بعديْن يعرف إذاً بإمكانية قياسه بطريقتين مستقلّتين. لكنّ وجهة النظر هذه في العلاقة مع القياس سوف لا يتم إعدادها إلا بعد ذلك بكثير، كما سنرى؛ وسوف تتطوّر نظريّة البعديّة، بدايةً، في اتجاه غير متري جذرياً.

سنطلق اسم «بُعد ديكارتي» على هذا التشكّل الأوّل للاعتلام، احتراماً للتمثيل الهندسي لدى الرياضيّ والفيلسوف الكبير. بيد أن صعوبة سوف تبرز في نهاية القرن التاسع عشر بخصوص لا تغيّرية هذا المفهوم. كانتور، في مراسلة مع ديديكند (25 حزيران/ يونيو 1877)[1]، صاغ بالفعل تراسلاً تقابلياً لمقطع مستقيم على مربّع. ألا يشكّل البعد الديكارتي إذاً خاصّة أساسية للفضاء؟ لكن ديديكند لاحظ أن تطبيق كانتور غير مستقر، وإن كان فعلاً تقابلياً، إلاّ أنّه غير مستمرّ. وخمّن أن

«متصوّر عدد الأبعاد في اللاتغيّر يكتسب خاصية اللاتغيّر فعلاً من خلال شرط المقابلة المستمرة» (رسالة في 27 تشرين أول/ أكتوبر 1877).

Correspondance Canton-Dedekind, éditée par E. Nœther et J. Cavaillès (1) dans: Jean Cavaillès, *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*, présentation par Bruno Huisman; suivi de In memoriam par Georges Canguilhem (Paris: Hermann, 1994).

انظر أيضاً الفصل الرابع، الفقرة 2.1 وما بعدها.

بروير هو الذي سيبرهن بإحكام على لاتغيّر عدد الأبعاد وذلك بتحويل تقابلي وثنائي الاستمراريّة أو التشاكل التقابلي[2]، فمتصوّر البعديّة الديكارتية يظهر وكأنّه اكتسب معنى طوبولوجياً عميقاً.

3 ـ البعدية والطوبولوجيا

3.1 ـ في بداية هذا القرن أعيد تعريف البعد بوضوح وتبديهياً وطرح فعلاً بالنسبة لخصائص طوبولوجية لشكل من الفضائية. وهكذا أصبحت الفكرة الرئيسيّة أن يكون عدد أبعاد فضاء ما خاصيّة فضاء طوبولوجي، لا تتغيّر بتحويل تقابلي وثنائي الاستمراريّة. ومن ناحية أخرى، اعتبار شكل الفضائيّة كمجموعة نقاط قاد إلى تصوّر البعديّة في نفس الوقت كخاصيّة إجماليّة لتلك المجموعة وكخاصيّة، محليّة، أي البعديّة في نقطة ما، من الجليّ أنها لا تطابق إلا قليلاً الحدس الأولي للبعديّة والاعتلام.

3.2 ـ سنشير قبل كل شيء في هذا المنظور الطوبولوجي الصرف إلى تصور لم يستغل إلا قليلاً طرحه فريشيه[3]، فقد عرّف حينئذ «نمطاً من البعدية»، لا بعديّة: تكون مجموعتين من نفس النمط إذا أمكن لتشاكل تقابلي أن يطبق كل واحدة منهما على جزء من الأخرى؛ وبالمقابل إذا أمكن تطبيق إحداهما بتشاكل تقابلي مع جزء من الأخرى بصورة غير اعتكاسية، فإن نمط بعديتهما سيكون أقل، فنرى ههنا أن فكرة اللاتغير الطوبولوجي قد استغلت؛ ولكن إذا كان فضاءان يتمتّعان بنفس نمط البعدية وكان لهما أيضاً نفس

(2) Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Collected Works* (Oxford: North-Holland, [1909]), vol. 2.

(3) Maurice Fréchet, *Les Espaces abstraits* (Paris: [s. n.], 1926).

البعدية الحدسية (ونفس البعدية بالمعاني الطوبولوجيّة التي ستعرّف لاحقاً)، فبالمقابل فضاءان لهما نفس البعدية بهذه المعاني الأخرى المختلفة لا يكون لهما بالضرورة نفس نمط البعدية.

3.3 ـ يبدو لي أن التعاريف الآتية جميعها ترتكز في النهاية على متصوّر عامّ لفصل الفضاء إلى أجزاء منفصلة، فصلاً يعبر عنه بأساليب مختلفة وفق ما نتصوّر الأفضية من وجهة نظر الطوبولوجيا التوليفيّة (الحافّات) أو وجهة نظر الطوبولوجيا المجموعية (التخوم).

تقدم فكرة الطوبولوجيا الجبرية أو التوليفية، وهي لا تدخل مفهوم الاستمرارية المجموعاتي انطلاقاً من متصوّر المبسط، تصوراً آخر للبعدية لا يزال جبريّاً بالأساس إلا أنّه بمعنى من المعاني شديد الاختلاف عن تصور البعدية والاعتلام الديكارتي، فالمبسط من الرتبة n هو رسم تحدّده (n+1) نقطة مستقلة عن بعضها: والمبسط من الرتبة 1 تحدّده نقطتان متمايزتان، والمبسط من الرتبة 2 تحدّده ثلاث نقاط غير مصطفّة، أي غير واقعة على خطّ مستقيم، والمبسط من الرتبة 3 يحدّد بأربع نقاط لا تقع في مسطّح. والمباسط تتوالف بجمع يسهل تحديده وبضرب عناصر جسم أو حلقة، وفي أبسط الحالات حلقة الأعداد الصحيحة فتشكّل بنية مِدال. معاقد كهذه، (مضلّعات) أو متعدّدات المسطّحات، تكوّن إذاً أشكالاً من الفضائيّة، أو بصورة أدقّ تغطّي أشكال الفضائية «فتثلّثها». عدد أبعاد هذه الرّسوم الفضائيّة هو العدد n للمباسط الأوّليّة من الرتبة n في متعدّد المسطّحات العائدة له: توليف مباسط من رتبة واحد («خطّ»)، هو من بُعد واحد، توليف مباسط من بعديْن («سطح»)، هو من بعديْن. بإدخال مفهوم الحافّة (حدسياً: النقطتان تحصران قطعةً، والنقاط الثلاث تحصر مثلّثاً)، على أن يُعرّف بطريقة محض جبريّة كخاصة للأمدلة المؤلفة من مباسط ومعاقد؛ وبإدخال مفهوم «سلسلة» من المباسط،

ومفهوم «الدورة» أو المبسط عديم الحافة، ومفهوم علاقة «المماثلة» بين سلسلتين (لا تتمايزان إلا بالحافة)، نبني نظرية جبرية مواضيعها الحقيقية هي الزُّمَر الأبيلية لأصناف تكافؤ السلاسل بالمماثلة، فيمكن إذاً تعريف الفضاء المثلث بواسطة معقد من خلال خاصّية، جبريّة، في زمرة المماثلة التابعة له.

نرى هنا أن نزع الفضائية عن المفهوم قد أصبح شبه تامّ في حال اقتصار الطوبولوجيا على الجبر. غير أن زمرة المماثلة ذات الرقم n لفضاء عدد أبعاده n يمكن أن يعبّر عنها بلغة بالغة الحدس بقولنا: ، في فضاء كهذا، توجد دورات من رتبة P غير خاوية هي حافّات (تتكافأ بالمماثلة مع 0، ويمكن اختزالها إلى نقطة) إذا P < n، بيد إن الدورات الحافّات الوحيدة من رتبة n التي تحتويها هي الدورات الخاوية، فعلى سبيل المثال في فضاء من أبعاد ثلاثة، تقسم السطوح المغلقة (دورات من رتبة 2) الفضاء (هي حافّات)؛ وفي فضاء من [194] بعديْن تقسم الخطوط المغلقة (دورات من رتبة 1) الفضاء، لكن لا وجود لدورات من رتبة 2 حافّة، لأنه لا يوجد شيء ثلاثيّ الأبعاد للإحاطة.

3.4 ـ التعاريف الأخرى الآتية تستعمل أيضاً على نحو أكثر أو أقل وضوحاً مفهوم فصل الفضاء؛ تعتمد خصائص طوبولوجيّة مجموعيّة وتطبّق على متواصلات (مجموعات مترابطة مرتصة) بالمعنى الموسّع، ومن وجهة نظر المنطق هي تعاريف بالتواتر، مع تعيين الأفضية ذات البعد 0 أو (1 ـ) اصطلاحياً.

أ) في نصّ موجّه إلى قرّاء غير متخصّصين[4] كتب بوانكاريه: «اذا كان يكفي لتقسيم متواصل اختيار عدد معيّن من العناصر [أي من

(4) Henri Poincaré, *Oeuvres* (Paris: Gauthier-Villars, 1913-1965), p. 486.

النقاط] المتمايزة في ما بينها كان المتواصل من بعد 1». حدسيّاً، يمكن أن تقسّم نقطة الخط (أو نقطتان إذا كان مقفلاً). بصورة أعمّ، إذا أمكن أن يقسم الفضاء على الأقل عنصر بعديته n، فإن بعديته ستكون n+1، فالسطح، وبُعده 2، لا يمكن أن يقسمه عدد منته من النقاط بل خطّ بعده 1.

ب) في تعريف مانجر وأوريشون الكلاسيكي اليوم، نقول عن فضاء إن بُعديته n في النقطة p إذا كان n هو أصغر عدد صحيح بحيث يكون للنقطة جوارات بُعدية تخومها أصغر من n، أو نقول عنه إن بُعديته أصغر أو يساوي n إذا كانت له جوارات بُعدية تخومها أصغر أو تساوي n. نفترض أن بُعد الفضاء الخاوي هو 1 ـ . يكون بُعد الفضاء نفسه أصغر أو يساوي n إذا كان لجميع نقاطه من بعد أصغر أو يساوي n. ولكي نثبت أن بُعده n بالضبط، يكفي أن نبيّن أنه لا يمكن أن يكون أصغر من n، ولا أكبر من n، فهنا بالذات مفهوم تخم الجوار هو الذي يدخل تقسيم الفضاء، بين داخل وخارج. انطلاقاً من البُعد 1 ـ للفضاء الخاوي، نرى بالتواتر أنّ بُعد كلّ مجموعة من النقاط منتهية أو قابلة العدد هو 0. لكنّ لبعض المجموعات من النقاط غير القابلة للعدُّ بُعداً يساوي 0 أيضاً، كمجموعة الأعداد الصماء على سبيل المثال. (بالفعل، لجوار مفتوح U لنقطة نسبية P، مشكّل من الأعداد الصماء الواقعة بين العددين النسبيين r وs تخم خاو، إذاً ببعد 1، لأنّ كلّ عدد أصم ونقطة تراكم للجوار U هو في U). وهكذا نرى أن بُعد فضاء كانتور هو 0، والنتيجة هي نفسها بخصوص كل مجموعة من الأعداد الحقيقيّة التي لا تتضمّن أي فترة (متقطّعة كليّاً).

ج) تعريف لوبيغ يدخل تغطية الفضاء بعدد متناه من المجموعات المفتوحة، ويدخل «الفصل»، أو تقاطع مجموعات

التغطية، فنقول إن التغطية هي من الرتبة n إذا كان n العدد الأكبر بحيث يوجد (n+1) مجموعة تغطية تتقاطع. وللفضاء بُعد أصغر أو يساوي n إذا كان لكل تغطية مفتوحة ترفيع من رتبة دون أو تساوي n، أي غطاء بحيث كل مجموعة فيه تحتويها مجموعة في الأول. بخصوص كل غطاء مفتوح للفضاء R، على سبيل المثال، نستطيع أن نجد ترفيعاً (تهذيباً) بحيث مجموعتان فقط فيه لهما نقطة مشتركة: R هو من بُعد واحد. وبالمقابل بخصوص غطاء (تغطية) للفضاء R^2 نستطيع أن نجد ترفيعاً (تهذيباً) بحيث ثلاث لبنات فقط تتقاطع فيه، فبُعده إذاً 2.

تبيّن أن تعاريف لوبيغ ومانجر ـ أوريشون تتطابق في المجموعات قابلة المترزة ذات القاعدة القابلة العدّ، وبالتالي في R^n وفي أجزائها المفتوحة. لكنها لا تتطابق بالضرورة في أفضية مجرّدة أعم، إضافة إلى ذلك، وفي حالة كهذه، بُعدية فضاء يقبل العدّ وفق مانجر ـ أوريشون ليست بالضرورة 0، وبُعدية لوبيغ ليست رتوبة، أي إن من الجائز أن يكون لفضاء بعدية أقل من بعدية الفضاء الذي يحتويه[5].

4 ـ البعدية والقياس

4.1 ـ نقطة الانطلاق في تعريف البعدية الراجع إلى القياس هي ملاحظة أن حساب قياس رسم فضائي إقليدي يتأثّر بعدد أبعاده: من طول، ومساحة أو حجم، فالبعدية بالمعنى الحدسي وبالمعنى الديكارتي تدخل إذاً كأس نسبة تحاك بين رسمين لتمثيل النسبة بين قياسيهما للنسبة بين مساحتي رسمين متحاكيين بنسبة K هي K^2، وبين الحجمين هي K^3، ففي الحالة العامة حيث لا تكون المواضيع

(5) Witold Hurewicz and Henry Wallman, *Dimension Theory* (Princeton: Princeton University Press, 1948), Appendix.

أشكالاً فضائيّة أوليّة بل مجموعات غير معيّنة من النقاط، تقضي الفكرة، بناء على ما تقدّم، بأن نعطي تعريفاً للقياس يدخل فيه البعد، وفي أبسط الحالات الخاصّة يدخل كأس نسبة تَحاكٍ، فمن خلال إعادة تعريف قياس مجموعات من نقاط كان النظر في تعريف جديد للبُعد من قبل هاوسدورف(6) الذي كان المبادر في هذا الأمر. انطلق آنذاك من تغطية فضاء A (مجموعة من نقاط مزودة بمتريّة) بفصيلة تقبل العدّ من بولات A_i قطرها δA_i يوفّي بالعلاقة $\delta A_i < \varepsilon$ ونظر في الحدّ الأدنى للمجموع $\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^d$ حيث d عدد حقيقي موجب أو صفر وحيث ε عدد ثابت. القياس الخارجي البعدي من الرتبة d أي $\mu_d(A)$ سيكون منتهى هذا الحدّ الأدنى، عندما تؤول ε نحو الصفر.

مثل هذا القياس يوفّي بالشروط التي وضعها كاراتيودوري(7) واتبعها هاوسدورف:

أ) لكل مجموعة قياس خارجي $\mu \geq 0$ وعرضياً قد يكون غير متناه.

ب) إذا كان C جزءاً من A حصل $\mu(C) \leq \mu(A)$.

ج) إذا كان A اتّحاد مجموعة متناهية أو قابلة للعدّ من مجموعات A_i، عندها كان $\mu(A) \leq \sum \mu(A_i)$.

---

(6) Felix Hausdorff, «Dimension und ausser Mass,» *Mathematische Annalen*, vol. 79 (1919), pp. 157-179.

(7) «Ueber das lineare Mass von Punktmenge,» Nachricht. Ges. Wiss. Göttingen, 1914, pp. 404-426, et Georges Bouligand, *Les Définitions modernes de la dimension*, actualités scientifiques et industrielles (Paris: Hermann, 1935).

ليسمح لي بأن أغتنم هذه الفرصة لأكرّم ذكرى هذا الأستاذ المتواضع المتفاني في السوربون، كاتب مؤلفات مبتكرة تعليميّاً، وأحد أوائل الذين عرضوا وفهموا أهميّة نظريات هاوسدورف في البعدية.

د) إذا كانت المجموعة A والمجموعة B منفصلتين عندها كان $\mu(A \vee B) = \mu(A) + \mu(b)$.

هـ) $\mu(A) = \inf\ \mu(B_i), (B_i \cap A) \subset B_i$.

نقول إن مجموعة A تقبل القياس إذا كان لدينا، مهما كانت المجموعة w ذات القياس المتناهي، العلاقة $\mu_d(W) = \mu_d(W - (A \cap W)) + \mu_d(A \cap W)$.

هذا القياس يتطابق مع قياس لوبيغ، بخصوص مجموعة خطية من النقاط.

عندئذ نستطيع أن نعرّف بالمماثلة بعدية هاوسدورف لمجموعة على أنّه الحدّ الأعلى للأعداد الحقيقية d بحيث $\mu_d(A) > 0$ وعلى نحو أعمّ تحلُّ محلّ دالّة هاوسدورف $(\delta(A_i))^d$ دالة حقيقيّة مستمرّة غير متناقصة $K(\delta_i)$ تعمل على قطر بولات التغطية، فتكون البعدية عندئذ هذه الدالّة. نستطيع أن نبيّن بخصوص جميع الأفضية المتريّة، قابلة الفصل، المدمّجة المتشاكلة تقابلياً مع A، أن الحدّ الأدنى لبُعديتها وفق هاوسدورف يساوي بعديتها الطوبولوجية[8]، وأنّ بُعدية الفضاء A وفق هاوسدورف هو أكبر أو يساوي البعد الطوبولوجي وفق مانجر ـ أوريشون للفضاء A.

4.2 ـ المثال الذي انطلق منه هاوسدورف في تجديد متصوّر البُعدية هو مجموعة كانتور، التي سبق تقديمها في الفصل الخامس، في الفقرة 3.3. من مقطع المستقيم [0,1] نحذف الثلث المفتوح الوسطي، ثم نحذف من كل قطعة من القطعتين الباقيتيْن الثلث الوسطي، وهلمّ جرّاً على نحو لامتناه؛ مجموعة النقاط الباقية هي

(8) Hurewicz and Wallman, *Dimension Theory*, pp. 106-107.

متقطّعة كلياً، لا تحتوي أي فترة، لكن لها مفارقياً قوّة المتواصل، وهي مغلقة، مدمّجة وحتّى تامّة. قياسها وفق لوبيغ هو صفر. غير أن بنيتها الخاصّة تستدعي ـ على ما يبدو ـ تعريف قياس يتلاءم معها على نحو أفضل. وعندئذ نتحقّق بأنّه، إذا اعتمدنا، بخصوص دالّة قياس المقاطع المستقيمة المحتفظ بها على التوالي في بناء المجموعة، دالّة القوّة u^d، فإن العدد الحقيقي d الذي يوفّي بشروط بناء المجموعة يكون $^{Log2}/_{Log3}$، فبعدية هاوسدورف لمجموعة كانتور، ليس الصفر، بل هو عدد حقيقي واقع بين الصفر والواحد[9].

4.3 ـ كان لا بد للمتصور الهاوسدورفي الموضح من قبل بيزيكوفيتش ـ وقد حصل تصوره كتطوير مجرد صرف للبعد ـ أن يجد والحال تلك ـ تطبيقات في علوم الطبيعة، فقد لاحظ ب. مندلبرو، عند النظر في المشكل الذي طرحه قياس طول السواحل البحرية المسننة دائماً، بواسطة وحدة قياس تزداد صغراً وبمتابعة تفاصيل تزداد دقة، أن هذه الظواهر يمكن وصفها بعبارات هاوسدورفية: فخطّ الشواطئ هذا طوله بالقوّة لامتناه، وبنيته تتكرر، إجمالياً على الأقل، بصورة لامتناهية، وبمقاييس أكثر فأكثر اقتصاراً. وقد نشرت عن أرصادي أصيل، ل. ف. ريتشاردسون، بعد وفاته، محاولة قياس شواطئ بريطانيا العظمى، حيث يفترض بأن هذا الخطّ المنكسر على نحو لامتناه يمكن أن يتفكّك إلى فترات طول الواحدة u، بعدد Fu^{-D}، بحيث إن المجموع Fu^{1-D} يؤول نحو طول الخطّ

(9) بالفعل، لندوّن M(u) على أنّها قياس u. علاقة التواتر بين قطعة u في مرحلة القطعة u في المرحلة السابقة هي: $M(u) = 2M(u/3)$. إذاً في أخذنا بخصوص تابع هاوسدورف $M(u) = u^d$، $3^d = 2$ و$d \log3 = \log2$، حيث $(\log2/\log3)$ على قاعدة 3 de $2 = 0, 6309... < 1$.

المتعدّد الأضلاع عندما تكون الوحدة المختارة هي u، بينما F هو معامل يرتبط بالطول المقيس، أما D فهو وسيط حقيقي مستقلّ عن الوحدة u لكنّه مميّز لشكل الخطّ. بخصوص مثل هذه الخطوط، يطرح «مفهوم الطول قضيّة تصوريّة، والمعامل D يحمل حلاً ملائماً يمكن تناوله»[10].

قارب ماندلبرو نتيجة ريتشاردسون من نظريّة البعدية عند هاوسدورف، وسيرتبط الوسيط D، وهو ليس عدداً صحيحاً بالضرورة ببعدية الخطّ وفق هاوسدورف.

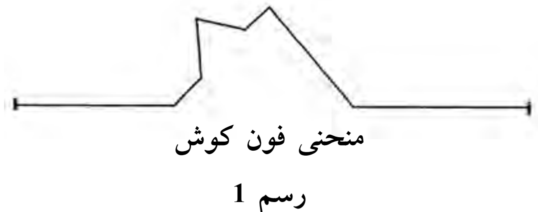
عندئذ أقر ماندلبرو، بحماس أن في الطبيعة العديد من الظواهر التي تتمتّع ببنية تتكرر بنفسها على مقياس سلم يتصاغر بصورة لانهائية، فأطلق عليها اسم «كسراء» (الفركتال) بسبب خاصّية تجزئتها اللامتناهية واستحالة جعل تقاطيعها «ملساء» (إنها تقترن في الغالب بدالاّت مستمرّة من دون مشتقّات).

سيكون وسيط البعدية D عند هاوسدورف عندها مميّزاً. وبالفعل، في حالة الشاطئ المسنّن، الوسيط D هو بحيث إذا أخذنا في صيغة ريشاردسون وسيطاً $d < D$، أصبح قياس طول الشاطئ غير متناه، وإذا أخذنا $D < d$، أصبح صفراً، عندما تؤول u نحو الصفر، فالوسيط الصحيح هو دائماً أكبر أو على الأقلّ يساوي البعد الطوبولوجي للكسراء وفق مانجر ـ أوريشون. هذه الخاصيّة في بعدية هاوسدورف وهذه البنية ذاتيّة التماثل هما ما أخذهما ماندلبرو كتعريف لكسراء تجريبيّة، رغم تردّده حول هذه النقطة.

(10) Benoît Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Updated and Augm. (New York: W. H. Freeman, 1983), p. 30.

على أيّ حال لقد أبرز رسمين مجرّديْن، نموذجيْن محكميْن للكسراوات (للفركتالات)، ميزا أهميّة الوسيط البعدي الجديد في كونه مرتبطاً بأشكال فضائيّة تختلف جذريّاً عن الأشكال المألوفة.

أ) نحصل على منحنى فون كوش(11) انطلاقاً من مقطع مستقيم طوله واحد نقسمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية. يستبدل المقطع الوسط بضلعي مثلّث متساوي الساقيْن، متساوييْن مع القطع المحتفظ بها. وتتكرر الطريقة على نحو لامتناه على المقاطع الجديدة التي نحصل عليها.



منحنى فون كوش

رسم 1

معادلة التواتر على قياس الجهات المتعاقبة هي عندئذ: $M(u)=4M(u/3)$. وبخصوص دالّة قياس هاوسدورف $M(u)=u^d$ نحصل على الحلّ $d=(\log 4)/\log 3$. والصيغة العامّة بخصوص هذا النوع من المنحنيات هي $d=\log N/\log r$ حيث N هي عدد الأضلاع التي تعوّض الضلع في الحالة السابقة، أما $1/r$ فهي نسبة التشابه في المراحل المتعاقبة، فبُعدية المنحنى الطوبولوجي - وهي 1 بوضوح، هي إذاً أصغر من بُعديته وفق هاوسدورف.

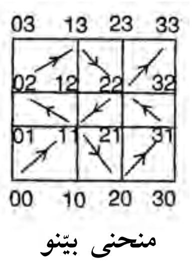
ب) يُبنى منحني بيّنو(12) في مربّع يقسَّم إلى تسع مربّعات

---

(11) H. Von Koch, «Sur Une Courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire,» *Archiv fur Matematik Astronomi och Fysik*, vol. 1 (1904), pp. 641-704.

(12) G. Peano, «Sur Une Courbe qui remplit une aire plane,» *Mathematische Annalen*, vol. 36 (1890), pp. 157-160.

متساوية، بحيث نأخذ الأوتار في ترتيب محدّد. المرحلة الأولى للمنحنى تتضمّن المقاطع:
(00) (11), (11) (02), (02) (13), (13) (22), (22) (11), (11) (20), (20) (31), (31) (22), (22) (33).



منحنى بيّنو

رسم 2

النقطتان (11) و(22) هما نقطتان مزدوجتان على المنحنى. ونعاود البناء على كلّ واحد من المربّعات، وهكذا دواليك، محتفظين بترتيبات المسير. في هذا المثال لدينا N=9 بينما 1/r = 1/3. بُعديّة هاوسدورف هي إذاً:

Log 9/log 3 = 2 log 3/log 3 = 2، بُعدية تفوق البُعدية الطوبولوجية للمنحنى الذي هو 1. هذا المنحنى الكسراء بعده وفق هاوسدورف هو إذاً العدد الصحيح 2، وهو البعد الطوبولوجي لسطح. وفعلاً نبرهن على أنّه يغطي جميع نقاط مربّع الانطلاق؛ لكن التناظر بين نقاط الخطّ ونقاط المربّع، إذا كانت مستمرّة، لا تكون واحداً لواحد.

يبدو لنا أن مفهوم البعدية يقدّم مثالاً جيّداً عن حال وأعداد ما نطلق عليه اسم متصوّر «طبيعي» في الرياضيّات. ومن دون أن نضع أنفسنا في وجهة نظر التكوّن السيكولوجي للمفهوم، نعتبره لأول وهلة كتجريد رياضي؛ لكنه تجريد يحجب تركيبياً جوانب صوريّة جوهريّة للإدراك الحسّي للمواضيع الفضائية. يتم إعداد هذا المتصوّر النموذج على مدى مراحل قصة. إلا أنّ التغيّرات الفجائيّة في هذه

القصة تبدو متسلسلة أساساً وفق ترتيب ظهور البُنى. هو حراك مزدوج، من جهة يطلق خصائص أكثر أوّليّة، كخصائص دالات الاعتلام أو خصائص الاستمراريّة وفصل مجموعات من نقاط؛ ومن جهة أخرى يعيد بناء متصوّر يدمج من جديد بين الطوبولوجيا والقياس مع تمييز لمركباته رغم ذلك. وعندها نرى كمفارقة أن المفهوم، مع أنه يطبّق على مظاهر حدسيّة في الأصل، يبتعد بشدّة عن الحدس الأوّلي المرتبط بالمتصوّر الطبيعي، وذلك بإدخاله على سبيل المثال بعديّات ليست أعداداً صحيحة.

ومع ذلك، هذا المصير لمتصوّر البعدية هو مثال لمصير كلّ متصوّر رياضي. يبيّن جيّداً أنه، حتّى إذا كان المتصوّر مرتبطاً في الأصل بتنظيم الواقع المدرك، فإنّه يتطوّر من خلال عمل إنتاج حرّ مُراقب يقيم حقائق افتراضية، غير اعتباطيّة، لكنّها غير معينة مسبقاً، ومستقلّة عن التجربة، حتى وإن حصل أن اكتشفت إثر تطبيقات في علوم الطبيعة.

5 ـ نظرية السطوح

5.1 ـ مفهوم البُعدية هذا هو إحدى مميزات مفهوم المتنوعة الذي سنقوم بإدخاله، فتجديد بناء شكل من أشكال الفضائيّة تحت اسم «متنوّعة» يعود في البداية إلى التطوير شبه الحسّي لنظريّة أشكال الفضائية الحدسيّة ذات البعديْن أو السطوح، التي سوف تصبح حالة خاصّة من متنوّعة تقبل التفاضل، ذات بعديْن. وفي هذه السيرورة ظهر مبحثان رئيسيّان. من ناحية ظهر التعارض بين نمط من التمثيل الخارجي للسطح، في كونه غاطساً في فضاء ثلاثي الأبعاد، وبين نمط من التمثيل الذاتي الذي يعتبر السطح نفسه كشكل مستقلّ من الفضائيّة، من دون اللجوء إلى فضاء يكتنفه، بحيث ترسم عليه على سبيل المثال منحنيات. وظهرت من ناحية أخرى، بخصوص تعريف

خصائص السطح، الأهميّة الحاسمة لشروط القياس المحلّي للمسافات على الخطوط المرسومة عليه. بطريقة ما تطوير هذين المبحثين مع الانتقال من 2 إلى n بعداً، هو ما سمح بتشكيل المتصوّر الأعمّ للمتنوّعة.

5.2 ـ تقود فكرة السطح الحدسية من دون عناء إلى فكرة شكل فضائيّة من بعديْن. بالمعنى الديكارتي للكلمة، أي أنّ نقاطه يمكن أن ترصد بتعيين وسيطين. في فضاء ثلاثي الأبعاد إحداثياته الديكارتية (x, y, z) يمكن تعريف السطح إذاً كمجموعة جزئيّة من نقاط توفّي بعلاقة، على نحو $F(x, y, z)=0$ على سبيل المثال، تربط بين الإحداثيّات الفضائيّة الثلاث لنقطة على السطح بحيث تحدد اثنان منها الثالثة. ويمكن أيضاً اعتلام (رصد) نقاط السطح من خلال متّجه $OM(u, v)$ في الفضاء المحيط، المعتبر فضاء أفينيّاً، اعتباطي الأصل O، والنقطة M ترتبط عندئذ بمتغيّرين مستقلين، يدوّنان u, v، ويحدد الزوج المؤلّف منهما بصورة كاملة، نقاط الفضاء المنتمية إلى السطح: $x(u, v); y(u, v); z(u, v)$، حيث يجوب المتغيّران u وv مجالاً محدّداً، فيلعبان بذلك دور إحداثيات (على العموم غير ديكارتيّة) بخصوص نقاط السطح. نشهد هنا الظهور الاستباقي لفكرة تمثيل ذاتي للسطح من خلال الإحداثيّتين u, v باستقلاليّة عن الإحداثيّات x, y, z في الفضاء المكتنف.

بواسطة شروط قابليّة الاشتقاق، يمكن أن نأخذ في الاعتبار المتّجه $\frac{\partial M}{\partial u}du$ والمتجه $\frac{\partial M}{\partial v}dv$، اللذين يعرّفان، في حال كانا مستقلّيْن خطياً، مسطّحاً اسمه مسطّح التماسّ على السطح في النقطة M. الاتّجاه المتعامد على هذا المسطّح في النقطة M هو اتّجاه العمود على السطح في M، المعرّف أيضاً بالضرب المتّجهي $\frac{\partial M}{\partial u}\wedge\frac{\partial M}{\partial v}$ الذي يحدّد توجّهاً أيضاً، فوجود مسطّح مماسّ وبالتالي

العمود في نقطة، نقول عندئذ إنها «غير مفردة»، هو لزوم مميّز لفكرة السطح الحدسية، المرتبطة بقابليّة اشتقاق الدالّة M(u, v) أو الدالّة F(x, y, z). ويسمح بأن نعرّف خاصيّة جوهريّة في كلّ نقطة من نقاط السطح، هي التقوّس. بهذا الصدد، لنبن «تمثيلاً كرويّاً»، آخذين العمود على السطح في كل نقطة من نقاط منحن مغلق حول نقطة M، يحيط بقطعة من مساحة F. انطلاقاً من نقطة مثبّتة في الفضاء 0 لنرسم متّجهات تتكافأ خطياً مع المعامدات الواحديّة في كل نقطة من نقاط المنحنى؛ وتكنس على الكرة ذات الشعاع 1 والمركز 0 منحنياً مغلقاً يحيط بمساحة G. نبرهن على أن منتهى النسبة G/F عندما تؤول المساحة F نحو الصفر، في اقتصارها على النقطة M، هو عدد يعرّف تقوّس السطح (الكلّي أو وفق غاوس) في M. ونرى على سبيل المثال عند انحدار هذه النسبة نحو الصفر، أن المعامدات على السطح حول M تأخذ اتّجاهاً ثابتاً، وأن الصورة G للمساحة F تختزل في نقطة على الكرة: ويكون السطح مسطّحاً. وإذا كانت هذه النسبة 1، تماهى السطح محليّاً مع قطعة من كرة تقوّسها ثابت.

لكنّنا نستطيع أن نصوغ تعريفاً أكثر التصاقاً بالحدس، لتقوّس سطح آخذين في الاعتبار تقوّس منحنيات مسطّحة ترسم على السطح من خلال تقاطعه مع مسطّح. نعرف أن تقوّس منحنى مسطّح هو منتهى معدّل تغيّر انحراف الزاوية dθ/ds بين مماسّين (أو معامدين) متقاربين بصورة لامتناهية على المنحنى، نسبة إلى طول القوس الذي يفصلهما: dθ/ds. تقوّس مثل هذا المنحنى المسطّح حصيلة تقاطع السطح مع المسطّح الذي يحتوي المعامد على المنحنى في النقطة M، سوف يعرّف تقوّسه وفق اتّجاه المماسّ على السطح، الواقع في المسطّح. عندما نقوم بفتل هذا المسطّح حول المعامد، نبيّن أنّ هناك بصورة عامّة في كل نقطة M اتّجاهين متعامدين، نقول إنهما

أساسيّان، وفقهما يكون تقوس القطع المعامد أقصى، وعلى التوالي أدنى. يبرهن غاوس على أن ضربهما يساوي النسبة التي سبق إدخالها المسمّاة التقوّس الكلّي. وهذا الأخير لا يتغيّر عندما نشوّه السطح بصورة مستمرّة من دون توسيع، وهو تحويل نقول إنه تشاكل متري، لأنه يحافظ على أطوال الأقواس وزواياها المرسومة على السطح. هذه هي مبرهنة غاوس المميّزة. وهكذا يظهر التقوّس الكلّي كخاصيّة جوهريّة في متريّته، مرتبطة بشروط قياس الأطوال على السطح.

5.3 ـ بالتماثل مع المسطّح، سنتساءل على أيّ سطوح قياسات الطول اللامتناهية في الصغر هذه، ds، يمكن أن تكون منتظمة من خلال المعادلة «الإقليدية»: $ds^2 = du^2 + dv^2$ على اعتبار أن du, dv هما مفاضلان على مماسّين على السطح مختارَيْن على نحو ملائم، عائدَيْن إلى متّجَهيْ اعتلام في فضاء متّجهي على مسطّح التماسّ. إذا استطعنا أن نجد على السطح في نقطة M، خطّيْ إحداثيات، مع u = ثابتاً وv = ثابتاً، بحيث المماسّ du والمماسّ dv يتمتّعان بهذه الخاصّة، نقول بأن متريّة السطح هي إقليدية، وعندئذ يكون طول القوس s يقبل الاحتساب على أنه التكامل $\int\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2}ds$ لكنّ اختزال شكل العنصر الخطّي ds في الشكل الإقليدي $\sqrt{du^2+dv^2}$ بتبديل الإحداثيّات، ليس ممكناً إلا بخصوص بعض السطوح(13). تقضي فكرة ريمان الأساسيّة بأن نخصّ أي سطح بشكل تربيعي عامّ على اعتبار أنه يعبّر عن ds^2 العائدة إلى هذا السطح؛ وهكذا نجد المتريّة معرّفة ليس فقط بخصوص سطح بل بخصوص شكل فضائية

---

(13) على سبيل المثال، ليس على الكرة؛ لكنّه على المسطّح، والمخروط والأسطوانة، ففي المسطّح، وفي الإحداثيّات القطبية r, θ لدينا $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$ وهذا شكل يختلف عن الشكل الإقليدي بالمعامل r^2؛ لكنّ بتبديل في المتغيّرات $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ يعيد الشكل الإقليدي في dx وفي dy.

بعديتها n. بخصوص الفضاء ثلاثي الأبعاد لدينا إذاً

$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx + g_{22}dy^2$

أي إنه في ترميز إينشتاين: $g_{ij}\ dx^i\ dy^j$. لدينا إذاً $g_{ij} = e_ie_j$ حيث e_i, e_j هما متّجها المعلم في النقطة M في مسطّح التماسّ (حيث للضرب السلمي معنى). نطلق اسم متريّة ريمانيّة في فضاء بعديته n على أيّ شكل تربيعي يعرّف من خلال أعداد g_{ij} (من بينها $\frac{n(n+1)}{2}$ عدداً متمايزاً بسبب تناظر المتغيّرات، وعلى سبيل المثال في الحالة $n = 3$ لدينا $dxdy = dydx$؛ $g_{12} = g_{21}$). هذه الأعداد هي في كل نقطة M دالات تعمل على الإحداثيّات؛ لكن بنية المتريّة لا ترتبط باختيار هذه الإحداثيّات لأننا نبرهن على أن g_{ij} هي مركّبات موتّر متغاير من الرتبة الثانية، تتحوّل مع المعلم المختار وفق الصيغ المشار إليها في الفصل السابق(14).

لنعد إلى الحالة الخاصّة حالة السطوح. عندما نأخذ في الاعتبار على سطح، وفق مماسّين متمايزيْن، إزاحتين لامتناهيتيْن في الصغر انطلاقاً من نقطة M هما dM وδM، نستطيع أن نتساءل إن كانت d مطبقة على الإزاحة δ لمتّجه انطلاقاً من النقطة $M(d\delta M)$ تعطي نفس نتيجة تطبيق δ على الإزاحة $d(\delta dM)$. الجواب هو بالإيجاب في حالة المسطّح؛ أمّا على سطح ما (في مسطّح تماسّه في M)، فهناك انحراف؛ وفي الترميز التفاضلي، بتطبيق عمليّتي التفاضل على متّجه e_i من المعلم، يكون المتجه $(d\delta e_i - \delta de_i)$ متّجهاً ليس بصفر ويمكن احتسابه انطلاقاً من متجهات المعلم الأصلي e_i على أنه ضرب بمؤثر متعدد الخطية Ω_i''، هو أيضاً موتّر مختلط من الرتبة الثانية:

(14) نفترض أنّ é هي متّجهات المعلم الجديدة، وأن e هي القديمة، القيمة الجديدة للمتريّة هي: $g'_{ij} = g_{kl}\frac{\partial e'_i \partial e'_j}{\partial e_k \partial e_l}$

$d\delta e_i - \delta d e_i = \Omega_i'' e_h$ هذا الموتّر يميز التقوّس[15]، وذلك بتعريفه بصفة عامة لاإغلاقية عمليّتي التفاضل المتعاقبتين على شكل الفضائية ذات البُعدية n. بخصوص سطح ما، ليس لهذا الموتّر سوى مركّبة واحدة لاصفريّة، سلميّة، تساوي مرّتيْن التقوّس الكلّي السلّمي الذي سبق إدخاله، فنبيّن عندئذ في حالة عدم اتخاذ هذا الموتّر القيمة الصفر، أن لا وجود لإحداثيات إقليدية بخصوص السطح (g_{ij} تختلف دائماً عن δ_{ij}) وأن متجهات المعلم تبدّل اتجاهها بالانتقال من نقطة إلى أخرى تتقارب منها بصورة لامتناهية على السطح، فمتريّة السطح ليست إقليدية. والحال أن مركّبات موتّر التقوّس يمكن حسابها انطلاقاً من القيم g_{ij}، فتتقابل بالتالي مع خاصيّة متريّة.

5.4 ـ نرى أن هذا الإعداد لمفهوم السطح يناوب بين متصوّر السطح كمتصوّر رسم، شكل فضائي في فضاء محيط، يتمتّع بخصائص خارجيّة في ذلك الفضاء، وبين متصوّر شكل فضائية تخط فيه رسوم. التبديل ما بين المتصوّرين متعاكس وجدلي إن صح القول؛ لأنه بفضل إدخال المتريّة اللامتناهية في الصغر، يصبح الفضاء ثلاثي البعدية الذي ترسم فيه السطوح ثنائيّة البعدية، ذاتاً تتمتّع بمتريّة وبخصائص باطنة ذاتية.

من الآن فصاعداً تُطرح قضيّة تتعلّق بهذا الشكل من الفضائيّة المزودة بمتريّة وبتقوّس، هي قضيّة المسلك، ففي حال السطوح، يمكن تعريف المواضيع الهندسيّة، كالمتّجهات على سبيل المثال، في كل نقطة في معلم محلّي في مسطّح التماسّ. بتنقّلها على

---

(15) بدقّة أكثر، نعرّف موتّراً جديداً $R_i{}^h{}_{rs}$ قائلين إنّه موتّر التقوّس أو موتّر ريمان– كريستوفل، بحيث الموتّر Ω_i^h يساوي: $R_i{}^h{}_{rs}\, dy^r\, dy^5$ حيث y^r وy^s هما المركّبتان المتغايرتان ضدياً للتغيّر لمتّجهين غير معيّنين.

السطح، كيف ستوصّف إذاً المتّجهات في المعلم المحلّي الجديد؟ على المسطّح ما من مشكلة، لأن المعلم نفسه يمكن نقله من دون أيّ تغيير من نقطة إلى أخرى، والسطح يتطابق في كل نقطة مع مسطّح تماسّه. لكن الأمر لا يبقى على هذا النحو إذا كان المعلم السامح بتوصيف الموضوع يتبدّل بتبدّل النقطة على السطح بسبب تقوّس هذا الأخير.

نقترح إذاً تحديد كيفيّة تغيير المعلم، وهو منظومة من متّجهات واحديّة مماسّة لمنحنيات إحداثيّات مرسومة على السطح، عند الانتقال من نقطة إلى أخرى متقاربة على نحو لامتناه. لنذكر أن المعلم هو مفهوم خطّي أو أفيني في الجوهر، بمعنى أنه يقع في مسطّح التماس المزوّد طبيعياً ببنية أفينية، تعرّف بواسطة متّجهات لامتناهية في الصغر تخضع للخطّية وللضرب السلمي (الجداء العددي). إن الفكرة الأساسية في حساب الإزاحات على السطح هي فعلاً هذا الاقتصار على الخطّية في اللامتناهي في الصغر على مسطّحات التماسّ، فنفهم أهميّة الأداة الهندسيّة الجبريّة التي هي الموتّر، لأن هذه المؤثرات هي متعدّدة الخطّية وتسمح بصياغة الخصائص من دون ارتباط باختيار منظومات الإحداثيّات. وسبق أن رأينا أن المؤثر يحدد شروط قياس الأطوال على السطح، ويحدّد أيضاً التقوّس. والنتيجة هي نفسها بخصوص توصيف حقول المتّجهات باعتبارها كيانات دائمة بصورة ما، لكنّها معرّفة في كل نقطة، بحيث إن مركّباتها يمكن أن تتغيّر بالتالي كما تتغيّر مختلف المعالم في مختلف نقاط السطح.

لنأخذ مثال حساب التغيّر اللامتناهي في الصغر لمعلم (M, e_i) عندما ننتقل من نقطة M إلى نقطة $M+dm$ ومن المعلم e_i إلى المعلم $e_{i+}de_i$.

التدخّل الأول للخطّية، بخصوص التعبير عن تغيّر النقطة M، في مسطّح التماسّ هو: $dM = e_i dy^i$، باعتبار الكميات dy^i هي المركّبات المتغايرة ضدياً للمتّجه dM في الإحداثيّات المختارة.

التدخّل الثاني: مفاضلات متّجهات المعالم e_i يعبّر عنها، في المعلم الأصلي كتوليفات خطّية: $de_i = \omega^j_i e_j$. والمعاملات ω^i_j هي مركّباتها المتغايرة ضدياً.

التدخّل الثالث: يمكن التعبير عن تلك المركّبات نفسها كأشكال خطّية للمتّجه dM، أي لمركبّاته dy^k: $\omega_i^{\ j} = \Gamma^j_{ki} dy^k$ حيث تميز المعاملات Γ لكونها دالات عاملة على النقطة M أي على المركبات y^k، «ترابط» السطح، أي تغيّر معالمه. ويبيّن أن حساب تلك المعاملات يمكن إجراؤه انطلاقاً من الموتّر المتري g_{ij}. لكنّها لا تسلك سلوك الموتّرات في تبديل المتغيّر، لأن التحويل يُدخل عندئذ المشتقّات الثانية للإحداثيّات الجديدة بالنسبة إلى القديمة، فإذا تطابقت مع الصفر، وفق اختيار ما للإحداثيات القوسيّة، قيل إن ترابط الفضاء هو إقليدي، وإنّ المعالم في هذا الفضاء هي إذاً لامتغيّرة في اللامتناهي في الصغر.

ويرتبط بنفس قضية «الهندسة التفاضليّة» حساب مركّبات عمليّة التفاضل لمتّجه V^i_{ei} في المعلم في النقطة M، ففي هذا المعلم لدينا $d(v^i e_i) = dv^i e_i + v^i de_i$، أي إنّه باعتبار الحساب السابق: $dv^i e_i + v^h w^i_h e_i$. والمتغايرة ضدّياً في المعلم e_i هي إذاً $dv^i + v^h w^i_h$، وبالنسبة للإحداثيات y^k، قيمة هذه المشتقّة المتغايرة المدوّنة ∇kv هي، بمقتضى الحساب السابق، إذاً: $\left(\frac{\partial v^i}{\partial y^k} + \Gamma^i_{hk} v^h\right) dy^k$، فلدينا إذاً، كمركّبات للمشتقّة المتغايرة القيم $\left(\frac{\partial v^i}{\partial y^k} + \Gamma^i_{hk} v^h\right)$، التي هي فعلاً قيم مركبات موتّر متغاير بخصوص k (إحداثيات النقطة M)، فإذا أخذت تلك المشتقة القيمة الصفر على طول منحن على السطح، فإن اتجاه

متّجهات المعلم لا تتغير عند مسايرة المنحنى؛ فنتحدث عندئذ عن نقل مواز، ففي فضاء إقليدي، يكون لمتّجهات حقل كهذا مركّبات ثابتة أو هي متناسبة على طول المنحنى. وهكذا يطالعنا المعنى الحدسي للتوازي في المسطّح، فمنحنى يكون المماس ثابتاً طوله، أي إنّ المشتقّة المتغايرة هي صفر، هو جودز السطح، بطول في نفس الوقت هو أدنى طول بين نقطتين على المنحنى، وعلى سطح إقليدي، هي المستقيمات.

5.5 ـ لا تدخل الاعتبارات السابقة سوى شروط محليّة، لامتناهية في الصغر، على السطوح، وشروط تنقّل خطوة خطوة. إلا أنّه من الواضح حدسياً أن السطح يمكن أن يكون محلياً، وحتى في جميع نقاطه، متكافئا متريّاً مع سطح آخر، مع اختلاف في الخصائص الطوبولوجيّة الإجماليّة، نظير المسطّح والأسطوانة، والمخروط (ما عدا نقطة مفردة التي هي رأسه)، وكل سطح يقبل الانبساط[16]، فإعادة البناء التركيبي للفضائيّة «الطبيعيّة» تتطلّب أن نأخذ في الاعتبار أيضاً هذه الخصائص الإجماليّة. رأينا، من هذا المنظار، أن قضيّة الانتقال من المحلّي إلى الإجمالي سبق أن طُرحت على مستوى المسالك اللامتناهية في الصغر خطوة خطوة على السطح. والمشكل يتمثل في تقويم أطوال المسيرات على السطح وانحرافها عن قياس المسافة بين نقطتين في الفضاء المحيط وهكذا يظهر المتصوّر الدقيق للتقوّس وقياسه جوهريين. ومن الطبيعي جداً أن تكون هذه القضايا في هندسة السطوح، التي حلّت في القرن الثامن عشر على يدي كلّ من كليرو ومونج، ثم طوّرت في القرن التاسع عشر على يدي كل من غاوس وكوشي وفرينيه وسيرّيه،

(16) يعنى جواز انحداره من خطوط التماسّ على منحن يساري، تقوّسه مستمرّ.

مطروحة في مباحث التحليل، أي في الخصائص التفاضليّة لدالات معرّفة على السطح، فقد رأينا فعلاً، أن متصورات المسطّح المماس والمعامد والمعلم قد أدخلت وضبطت وذلك بالنظر في اشتقاق بعض الدالات. لكن الخطوة الحاسمة كانت باتّجاه تعميم أساسي لمفهوم السطح، عندما أدخل ريمان متصوّر متريّة معرّفة من خلال شكل تفاضلي تربيعي. وانطلاقاً من ذلك وبالتزامن استخدمت أدوات فعّالة قدّمها التحليل، ففسّر التعارض بين تمثيل السطح كرسم في فضاء محيط ثلاثي الأبعاد، وبين تمثيله الجوهري كشكل فضائيّة مستقلّ، مزوّد بخصائص داخليّة للاعتلام والتوصيف. وقبل التطرّق إلى المرحلة النهائية من هذا التحوّل الذي قاد إلى تأسيس صريح لمتصّور المتنوّعة، نودّ أن نعلّق في فقرة موجزة على أشكال التجديد الريماني وظروفه انطلاقاً من نصّ ريمان الطليعي الذي سبق ذكره، «في الفرضيّات المؤسسة للهندسة».

6 ـ أطروحة ريمان: من السطوح إلى المتنوّعات

6.1 ـ كنصّ لنيل شهادة الأهليّة قدّم ريمان أطروحته في حزيران/ يونيو سنة 1854 في جامعة غوتينغن. سأبرز منها النقاط الجوهرية، من منظور الانتقال من نظرية السطوح إلى متصوّر المتنوّعة.

نلاحظ بداية أن ريمان يهتمّ صراحة بالعلاقة بين مقادير بعديّتها n، تسمّى «متعدّدات»، ومقادير بعديّتها n + 1 تحتويها، وخاصة بالمقادير أحادية البعد (هي الخطوط) التي تحتويها مقادير ثنائية البعد (السطوح). وتقضي الفرضيّة العامّة التي يطرحها بأنّ قيمة المقادير، وأطوال الخطوط بصورة خاصّة مستقلّة عن موقعها على المتعدّدة التي تحتويها، وأنّ كلّ خطّ على سطح، يقبل القياس بواسطة خطّ آخر (I.1)، فيقترح الفكرة العامّة في أن نأخذ على متعدّدة، دالّة مستمرّة

تعمل على نقاطها، وأن ننظر إلى مجموعة النقاط التي تكون فيها هذه الدالّة ثابتة، على أنّها تعرّف على المتعددة الأولى متعددة تقل بعديّتها بواحد. هذه هي إذاً، في حال السطوح، شروط قياس الأطوال على الخطوط المرسومة على السطح الواجب صياغتها، فبصورة ما، وجهة نظر ريمان تظهر هنا كأنّها كَنْتيّة في ما يريد فرضه من شروط لإمكانية القياس. لكن من الواجب بالنسبة إليه أن تتوضّح مسألة أن نعرف إن كانت المباده التي تبرزها هذه الشروط في هندسة محدّدة تتأتّى منها بالضرورة أو أنّها تصبح من خلالها ممكنة فقط. والحال أن منظومات مختلفة من المباده غير المتناقضة هي ممكنة. مهمّة عالم الهندسة الفيلسوف ستكون إذاً، من ناحية، فرض الشروط العامّة للقياس بكلمات صوريّة، ومن ناحية أخرى معرفة إن كانت التجربة هي التي يمكن أن تقّر المباده محدّدة المنظومة الواجب تطبيقها على متصوّر تجريبي للفضائيّة. وعندئذ تلك هي وقائع تفرض نفسها، لا لضرورة استنتاجيّة، بل لكونها فرضيّات يجوز أن تؤكدها التجربة (II.3). على أن بناء نظريّة القياس كمؤسّس لهندسة ممكنة، يفرض تخطّي مجال التجربة، من خلال فرضيّات في مجال اللامتناهي في الصغر، بشكل خاصّ، فعالم الهندسة المؤسّس يجب أن يفكّر أولاً، ولكن عليه أيضاً أن يقدّر الاحتمال التجريبي لتلك الفرضيّات.

6.2 ـ ينطلق تحديد شروط القياس على سطح ما، كما رأينا، من قياس أطوال تزوّدنا بها أزواج من الدالات المستمرة العاملة على متغيّر واحد انطلاقاً من نقاط السطح، فسوف نعتبر إذاً في كل مقدار، عناصر لامتناهية في الصغر لامتغايرة ندوّنها كمفاضلات، وبالنظر إلى خطوط أقصر درب بين نقطتين متجاورتين، تزّودنا عنها الدالاّت المستمرّة بالمسافات، فإنّها تمدّنا باتجاهي إحداثيّتَيْ نقطة على السطح، وعلى العموم باتجاهات عددها n-1 إحداثية في متعدّدة بعدها n-1. وسوف نسلّم بأنّ المسافة d_s بين نقطة وأخرى تبعد عنها بمسافات لامتناهية في

الصغر dx وdy وفق الاتجاهين المختارين تتغيّر خطيّاً مع dx ومع dy. وعندئذ ما يجب تثبيته هو شكل العنصر الخطي ds بالنسبة إلى تغيّرات dx في الإحداثيّات. نفترض أنّ المسافات s انطلاقاً من نقطة مصدر وحولها، تتعاظم وتصل حدّها الأدنى في هذه النقطة، فيكون عندئذ للدالة f مفاضل صفر ومفاضل من الرتبة الثانية موجب دائماً. ضمن هذه الفرضيّات، يكون الشكل الأكثر بساطة للعنصر s «الجذر التربيعي لدالّة تعمل على المقادير dx، موجبة، متجانسة، من الرتبة الثانية، حيث المعاملات هي دالات مستمرّة تعمل على المقاديرx» (II.1). على سطح ما سيكون العنصر ds لخط ما $\sqrt{adx^2 + bdxdy + cdy^2}$. وفي حالة ثلاثة أبعاد بدل بعديْن «سيكون الفضاء [بالمعنى الهندسي] أيضاً من ضمن هذه الحالة الأبسط». وبصورة عامّة، حتّى عند حديثه عن سطوح، ينظر ريمان في متعدّدات بعديّتها n-1 في متعدّدة بعديتها n.

لكن من الممكن أيضاً، ضمن نفس الفرضيّات، أن نأخذ كعنصر خطّي ds الجذر الرباعي لشكل تفاضلي تربيعي، وفق المبادئ عينها؛ إلا أن هذا الاختيار يقود على ما يبدو إلى «إضاعة الوقت من دون أن يسلّط إلاّ القليل من الأضواء على نظريّة الفضاء، لأن النتائج لا يمكن تفسيرها هندسياً» (II.1)، فاختيار العنصر ds^2 هو إذاً تبسيط اعتباطي.

6.3 ـ إذا أخضعنا الإحداثيّات لتحويلات ملائمة، تبدّل شكل الدالّة الرباعي، فلا سبيل للحصول بهذه الطريقة على أي شكل، مثلاً الشكل الإقليدي المميّز $\sum_i dx_i^2$ ، نظراً لوجود إحداثيّات متغيّرة عددها n ومعاملات مجهولة عددها n (n+1)/2، «فالمتعدّدات التي يمكن إرجاع العنصر الخطّي فيها، كما في المسطّح إلى الشكل $\sqrt{\sum_i dx_i^2}$ تكوّن إذاً حالة خاصّة مميّزة، تستحقّ اسماً ذاتياً: وسيصفها ريمان بالمماثلة، «بالمتعدّدات المسطّحة» (II.1).

وعندئذ يبيّن ريمان أن التقوّس الكلّي عند غاوس يقيس مقدار الانحراف بين شكل عنصر السطح ds^2 (في متعدّدة ما) وبين الشكل الإقليدي لمتعدّدة مسطّحة (II.2)، باستقلاليّة عن اختيار الإحداثيّات. يتناسب التقوّس الكلّي مع فائض مجموع زوايا مثلّث لامتناه في الصغر عن زاويتيْن قائمتيْن (II.3). وعندئذ يعطي ريمان قيمة العنصر ds^2 لمسطّح ثابت التقوّس بحساب تقوّس غاوس هذا (II.4).

وقد لاحظ أيضاً أنّه، في حال السطوح، يمكن الاستغناء عن علاقات هذه السطوح مع النقاط الخارجيّة، وبكلام آخر يمكن أن نأخذ في الاعتبار تمثيلاً ذاتيّاً للسطح، «فأطوال الدروب (المسالك) على السطح هي الوحيدة التي تؤخذ في الحسبان» (II.3)، إذ بالفعل نستطيع اعتبار السطوح التي يتبدّل شكلها في الفضاء من دون تغيير في قياسات الأطوال عليها، متكافئة، أي إنّها متغيّرة الشكل من دون توّسعات، ففريمان يميّز إذاً بين «نسب التوسّع» في سطح، أي خصائصه الطوبولوجيّة الإجماليّة وبين «نسب القياس» (III.2).

6.4 ـ في معرض هذا التمييز طرحت صراحة قضيّة تطبيق بنية مجرّدة لمتعدّدة، في عالم التجربة. من وجهة نظر «نسب التوسيعات»، يجب التمييز بين اللانهائي واللامحدود، كما يتميّز السطح غير المحصور في مسطّح عن سطح الكرة. والتجربة، على حّد قول ريمان، تجعل فرضيّة كون لامحدود أكثر احتمالاً، من دون أن ينتج عن ذلك لانهائيّته (III.2). أمّا شكل العلاقة المتريّة في هذا الفضاء، فإن ميزاته لا يمكن أن تستنتج إلاّ من التجربة. ولكن إن كان من الواجب تمثيل هذه الحقيقة التجريبيّة بمتعدّدة متواصلة، فإن العلاقات المتريّة المعتمدة في اللامتناهي في الصغر، إذا أكدت التجربة نتائجها، يجب أن تتأسّس عندئذ فيزيائياً، من خلال «قوى تفرض قيوداً» (III.5). «وهذا ما ينقلنا إلى مجال علم آخر، هو الفيزياء».

يميّز ريمان في النهاية بين بناء حرّ لمتصوّرات عامّة في الهندسة، قائمة على نظريّة مجرّدة للمتعدّدات وبين اختيار مباده تصلح للاستعمال عند تطبيقها على الظواهر، وتقيّم التجربة جدواها، فمتصوّر ريمان للفضاء هو، بطريقة ما في منزلة وسطى بين موضوع محض رياضي خصائصه المسلّم بها محرّرة ومفكّكة، وبين وحدة تأليفية أصلاً، لموضوع رمزي ننعته «بالطبيعي». وهكذا يكون شكل العنصر ds^2 غير مقيّد لكن لا بّد من وجود قاعدة للقياس «طبيعية».

7 ـ متنوّعات: اعتلام وخطخطة

7.1 ـ رأينا كيف مهّد ريمان، انطلاقاً من نظريّة عامّة للسطوح، لنظريّة أكثر تجريداً لأشكال فضائية بعديتها n. وفي منظور أكثر انفصالاً عن الهندسة الملموسة في الفضاء الفيزيائي، من منظور ريمان سوف تتطوّر هذه النظريّة مع حافز جوهري هو التحديد الدقيق لشروط تطبيق التحليل على دوال (دالات) معرّفة على شكل فضائيّة، فبالفعل، إيجاد حلّ لمعادلة تفاضليّة هو إيجاد منحن على سطح ـ في متنوّعة ـ بحيث إن متّجهات التماسّ على السطح ـ على المتنوّعة ـ تكون في كل نقطة تماسيّة بمعنى من المعاني على الدالّة التي تحّدد المنحنى، فعلى سبيل المثال توصيف البنية الطوبولوجيّة لهذه المنحنيات الكاملة انطلاقاً من هندسة السطح ـ المتنوّعة ـ هو، في تعبير حديث قضيّة بوانكاريه. هذه هي وجهة نظره تماماً في المنشورات المؤسّسة المتعلقة بنظريّة نوعيّة للمعادلات التفاضليّة، لكن تلك المنشورات تمثّل أيضاً نقطة انطلاق لنظريّة المتنوّعات والطوبولوجيا الحديثة في نفس الوقت[17].

(17) زيادة عن ريمان، كان لبوانكاريه سابقون مختلفون؛ لكنّ هدفنا ليس تقديم تاريخ لمتصوّر المتنوّعة. انظر حول هذه النقطة: Erhard Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré* (Boston; Base; Stuttgart: Bikhäuser, 1980).

7.2 ـ في العام 1895، في مجلّة مدرسة بوليتكنيك، ظهرت منشورة عنوانها: **تحليل المواضع**[18]. كان قصد بوانكاريه تعريف الخصائص الطوبولوجية لأشكال الفضائية التي أطلق عليها اسم «متنوّعة»، فعرّف عندئذ هذه الأشكال من خلال شروط تحمل على دوال (دالات) تعمل على إحداثيّات نقاط الأشكال في فضاء بعديته n، وهي أجزاء فيه. ومدّنا بتعريفيْن كلاهما يحدّد المتنوّعة كفضاء جزئي من بعدية m في فضاء محيط بعديته n حيث $m < n$.

بخصوص التعريف الأول، تُعطى، في فضاء بُعديته n، دوال F_i عددها p ودوال ϕ_i عددها q يفترض أنها مستمرّة وقابلة للاشتقاق بإستمراريّة. المعادلات: $F_i(x_1... x_n) = 0$ وعددها p والمتباينات $\phi_i(x_1... x_n) > 0$ وعددها q، تحدّد متنوّعة بعديّتها $m = n-p$، تحصرها q متباينة.

والتعريف الثاني، وهو يتعلّق على نحو خاصّ بالمتنوّعات «التحليليّة»، يدخل دوال تحليليّة Θ_i عددها m تعمل على متغيرات $y_1...y_m$ عددها m بحيث $x_i = \Theta_i(y_1...y_m)$.

تعرّف تلك المعادلات، وعددها n متنوّعة تحليلية بعديّتها. ويعطي بوانكاريه مثالاً على هذا التعريف المزدوج، تعريف الطارة، المتنوّعة المغلقة ثنائية البُعدية (وحتّى السطح التقليدي)، فالتعريف الأول يستمدّ من المعادلة على x_i:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

(18) «analysis situs,» dans: Henri Poincaré, *Oeuvres* (Paris: Gauthier-Villars, 1913-1965), vol. 6.

ويُستمدّ الثاني من خلال ثلاث معادلات تعطينا قيم الإحداثيّات الثلاث لنقاط الطارة بالنسبة إلى إحداثيّتيْن محليّتيْن y_i:

$$x_1 = (R + r \cos y_1) \cos y_2$$

$$x_2 = (R + r \cos y_2) \sin y_2$$

$$x_3 = r \sin y_1$$

حيث الإحداثيّة y_1 والإحداثية y_2 تقعان بين 0 وبين 2π.

في منشورة أخرى سابقة(19)، تفحّص بوانكاريه الفرضيّات الضروريّة لتأسيس «هندسة تربيعيّة»، أي الهندسة المبنية على تربيعية، رابطاً إيّاها بخصائص زمرة من الحركات اللامتناهية في الصغر وفق مفهوم لي، لا تمّس المسافات، فهنا إذاً تمّ إبراز الوجه المتري للمتنوّعة. أمّا في المنشورة «تحليل المواضع»، فإن بوانكاريه سيعرّف في متصوّره للمتنوّعة مفاهيم الحافّة (التي يسمّيها «حدّاً»)، وسيدخل نظريّة التماثل (التشاكل)، وأعداد بيتي، والثابت الشامل المسمّى منذ ذلك الحين بثابت أولير ـ بوانكاريه. وبعدئذ أصبح الموضوع الهندسي التحليلي الجبري المسمّى متنوّعة مطروحاً من جميع وجوهه أمام استكشاف الرياضيّين.

7.3 ـ يمكن أن نعتبر أن متصوّر المتنوّعة كشكل فضائية يقدّم إعادة تركيب فضاء «طبيعي» انطلاقاً من مفهوم بحت وبسيط لمجموعة نقاط، فهي تدخل منظومة اعتلام، وفي نفس الوقت متريّة وطوبولوجيّة. لكنّ إعادة البناء هذه محليّة في الأصل وفي الجوهر؛ والمتنوّعة لا يمكن أن تعمل كركيزة دوال إلا بواسطة بعض

(19) «Sur Les Hypothèses fondamentales de la géométrie,» 1887, dans: Poincaré, *Oeuvres*, vol. xi, p. 79.

الخصائص التي تسمح بإعادة إلصاق أجزاء سبق اعتلامها(رصدها)، فما يميّز متصوّر المتنوّعة إذاً كما هي مستعملة اليوم من قِبَل جلّ الرياضيّين هو، من ناحية، سيرورة قانونية تخصّ فيها نقاط الفضاء بإحداثيّات، ومن ناحية أخرى هو خاصيّة قبول تفاضليّة (خاصية تفاضل) دوال معرّفة عليه، تعمّم خاصيّة السطوح الحدسيّة، المتمثلة في أن لها في كلّ نقطة مسطّح تماسّ. يظهر هذا الوجه المزدوج، في شكل أصيل حقاً، مع بناء خرائط تسمح بأن تمثل محليّاً الشكل الفضائي منظوراً فيه بواسطة صورته على فضاء نموذج يتكوّن من المجموعة R^n للأعداد الحقيقية مزوّدة بمتريّتها وبطوبولوجيتّها «الطبيعيّتيْن». وعلى سبيل المثال، نرجع إحداثيات نقاط متنوّعة ثنائية الأبعاد إلى إحداثيات نقاط R^2، أي المسطّح. وبصورة أعمّ، يمكن أن نأخذ بخصوص فضاء التمثيل، بدل R^n، فضاء متجهياً معيّراً وتامّاً، فضاء باناخ، فنغطّي الفضاء V للمتنوّعة المقبلة بفصيلة تقبل العدّ من أجزاء U_i، ونقرن بكل جزء ϕ_i تقابلاً على مجموعة مفتوحة E_i في R^n، يكوّن خريطة U_i، فتقرن حينئذ بكل نقطة، إحداثيات النقطة المقابلة في E_i وعددها n.

وتلك ستكون «الإحداثيّات المحليّة» للنقاط U_i في المتنوّعة. لكنّنا نريد أن تكون هذه الإحداثيّات التي نحصل عليها من خلال التقابلات المختلفة ϕ_i بخصوص كل U_i مترابطة على المتنوّعة، أي إن الانتقال من منظومة إلى أخرى يتمّ وفق دالة بسيطة «ومالسة» على نحو معقول، فنوجب إذاً، في النقاط التي يشترك فيها الجزء U_i والجزء U_j أن يكون التطبيق $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ الذي يطبّق الإحداثيّات الجديدة على القديمة قابلاً للتفاضل. وههنا أول ظهور للوجه الثاني المعلن في الخطخطة المحلية، فبالفعل، يكون التطبيق f قابلاً للتفاضل في النقطة x إذا أمكن مقاربته في اللامتناهي في الصغر

بتطبيق تآلفي[20] ينعت عندئذ بالمماس له. وهو على نحو: $f(x+h)=f(x)+v(h)$ حيث $v(h)$ تطبيق خطي يؤول نحو الصفر مع h، ويسمّى «مفاضل» f وندوّنه df. وهكذا يكون الانتقال من منظومة إحداثيّات محليّة إلى أخرى ـ من خريطة إلى أخرى ـ مختزلاً في تطبيق خطّي. ومجموعة خرائط مترابطة على هذا النحو هي «أطلس» يعرّف الفضاء «كمتنوّعة تقبل التفاضل».

لنلاحظ أن الفضاء المبني على هذا النحو كان من الممكن افتراضه طوبولوجياً أوّلاً، فتكون الأجزاء U_i التي تغطّيه عندئذ مجموعات مفتوحة لكننا نستطيع أيضاً الانطلاق من فضاء V كمجموعة بسيطة من نقاط، من دون شكل. بناء الخرائط نفسه يسمح بأن نعرّف بصورة أحاديّة الدلالة طوبولوجيّة على هذا الفضاء حيث المجموعات U_i هي مفتوحات وحيث التقابلات ϕ_i هي تشاكلات متّصلة. والنقطة الجوهريّة هي في أن المتنوّعة تتكوّن من إعادة إلصاق أجزاء مفتوحة في تشاكل متصّل مع مفتوحات في R^n (أو في فضاء باناخي بعديته n) باشتراط أن تكون تطبيقات الخرائط خطيّة على دوال الخرائط. مثال بسيط على مثل هذه المتنوّعة ثنائية البعد هو بوضوح سطح الكرة S^2، مغطّى بمجموعتيْن مفتوحتيْن إحداهما الكرة بعد حذف القطب الشمالي منها والأخرى الكرة بعد حذف القطب الجنوبي منها، مع الإسقاطيْن التجسيميّيْن على المسطّح الاستوائي لإحداهما من القطب الشمالي، والأخرى من القطب الجنوبي. لكل نقطة على الكرة كإحداثيّات محليّة في كلّ واحدة من المنظومتيْن، إحداثيّات نقاط المسطّح الاستوائي المقابل. بخصوص كل من

(20) لنذكر بأن التطبيق (التآلفي) $f(x)$، الذي يعمّم التطبيق الخطّي ax، مع a ثابت، هو تطبيق على شكل $a+bx$ حيث a ثابت وحيث b ثابت.

الخريطتيْن إحداثيّات أحد القطبين هي إحداثيّات مركز الكرة، في حين أنّ صورة القطب الآخر هي نقطة في اللانهاية من المسطّح الاستوائي. وشرط قبول التفاضل بين الخريطتيْن نابع من اعتبارات أوليّة على حساب المثلّثات.

7.4 ـ إذاً تظهر الخطخطة الخاصّة بالمتنوّعات قابلة التفاضل من جديد، وبصورة جوهريّة، مع تعريف الأفضية المماسّة لمثل هذه المتنوّعة. ويفترض المفهوم الطبيعي الحدسي للسطح وجود مسطّح تماسّ في كل نقطة من نقاط هذا السطح، مسطّح هو إن صح القول مقاربته الخطية، كما رأيناه في الفقرة 2.2.

إن متصوّر الفضاء المماسّ لمتنوّعة، وهو امتدادها، يمكن تعريفه فضلاً عن ذلك كتعميم حدسي مباشر للمسطّح المماسّ للسطح، فنأخذ في الاعتبار في نقطة x_0 منحنياً معرّفاً على المتنوّعة V، أي دالّة C تعمل من المقطع I في R نحو V، حيث $C(x_0)=0$ وحيث $c(t)=x$ بخصوص $t\epsilon I$، فإذا كانت تلك الدالّة قابلة للتفاضل عند حملها على الإحداثيّات المحليّة، فعندئذ ننعت متّجه تماسّه بالمماسّ للمتنوّعة، والفضاء المتجهي ذو عدد الأبعاد المساوي لأبعاد المتنوعة المشكلة من مجموعة متّجهات التماسّ على جميع المنحنيات القابلة التفاضل على V المارّة من النقطة x_0، سوف يكون الفضاء المماس للمتنوعة $Tx_0(V)$ في النقطة x_0. تعريف إن تمّ تطبيقه على سطح أعطى مسطّح التماس.

لكنّنا نستطيع أيضاً أن نصوغ بأسلوب مرادف لكنّه أكثر تجريداً تعريف متّجه التماسّ على المتنوّعة على أنّه دالّة خطيّة $v(f)$ مماسّة لدالّة عدديّة تقبل التفاضل $f: V\rightarrow R$ معرفّة في جوار النقطة x_0 وتوفي بقاعدة الاشتقاق وفق لايبنتز؛ $v(f(x).g(x))=f(x).v(g(x))+g(x).v(f(x))$ ومجموعة هذه الدوال الخطّية تكوّن فضاء تماسّ على المنوّعة في النقطة x_0. ونبيّن أن هذا الفضاء هو متجهي يتماهى مع الفضاء

$Tx_0(V)$، فهو يحقّق على نحو معيّن خطخطة محليّة للمتنوعة V، وكل خريطة V تحدّد المقابلة بين Tx_0 وبين R^n (أو بين فضاء باناخ المستعمل) التي توضّح محليّاً طوبولوجيّة ومتريّة المتنوعة V.

يسمح بناء فضاء كمتنوّعة تقبل التفاضل بأن نعطي معنى عمليّاتياً لخاصيّة قبول التفاضل، لدالّة عدديّة معرّفة على المتنوّعة، بعد أن كانت تعرّف آنفاً على فضاء متجهي فقط، فضاء باناخ أو R^n على سبيل المثال. نفترض أن $f: V\rightarrow R$ هي دالّة من ذلك القبيل، وأن (u, ϕ) خريطة في x. التركيب $fo\phi^{-1}$ هو دالّة تعمل من ϕ (U)، التي هي جزء من R^n نحو R، وتمثّل الدالّة f(x) في هذه الخريطة. ونقول إن الدالّة f تقبل التفاضل إذا كان هذا التمثيل، الذي هو دالّة، تعمل من R^n نحو R، يقبل التفاضل، وهذا لا يرتبط بالخرائط المستعملة في تمثيل f.

بصورة أعمّ، إذا أخذنا بعين الاعتبار دالّة f تعمل من متنوّعة تقبل التفاضل ولها n بعداً نحو أخرى لها m بعداً وأشير إلى خريطتيهما على التوالي بالحرف ϕ والحرف ψ، كانت الدالة العاملة من R^n نحو R^m: ψ 0 f 0 φ^{-1} تمثيلاً للدالّة f في هاتين الخريطتين المحليتين. وبصورة خاصّة، إذا كانت f تقابلاً وتقبل التفاضل وكذلك معكوستها، بصورة مستمرّة، أطلقنا عليها اسم تشاكل تفاضلي (أو تقابل أو مقابلة تفاضليّة). وتحفظ على نحو ما بنية المتنوّعة قابلة التفاضل، كما تحفظ التشاكلات المتصلة البنى الجبرية، وكما تحفظ التشاكلات التقابلية بنية الفضاء المتجهي، وكما تحفظ التشاكلات الشبهية بنية الفضاء الطوبولوجي، فمن وجهة نظر مجرّدة، المتنوّعات هي إذاً مواضيع فئة تشاكلاتها هي التقابلات التفاضليّة.

7.5 ـ المتنوّعات التي تمّ ذكرها حتى الآن هي متنوّعات بسيطة. لكنّ بعض السطوح، كالأسطوانة، تقتضي أن نأخذ في الاعتبار

متنوّعات كضرب طوبولوجي لمتنوّعات أبسط، فالأسطوانة يمكن توصيفها فعلاً كضرب منحنى قاعدتها بكلّ واحدة من مولّداتها. لكنّ شكل فضائيّة، نظير شريط موبيوس، برغم أن من الممكن اعتباره محليّاً كضرب دائرة قاعدته بمقطع I في مجموعة الأعداد الحقيقية R، ليس في المجمل ضرب القاعدة بهذا المقطع، لأن اتّجاه هذه الأخيرة يتبدّل عندما نجوب القاعدة. ومن هنا جاءت ضرورة التعريف بصورة أدقّ بطريقة تركيب المتنوّعتين مع أخذ إحداهما هذا، في الحسبان.

نفترض أن E هو الفضاء المركّب المطلوب بناؤه، وأن B هي متنوّعة القاعدة وأن π دالّة غامرة مستمرة تعمل من E نحو B، ففي كلّ نقطة x في B، الجزء من E قيمة $\pi^{-1}(x)$ هو متنوّعة تدعى «ليفة» فوق النقطة x في «المتنوّعة المليفة» E. إذا كانت جميع الألياف متماهية، في حدود نفس التشاكل الطوبولوجي، كما هي حال الأسطوانة، عندها نقول بأن المليّف «مبتذل»؛ وفي هذه الحال، بخصوص كل مفتوحة U_i، في B تتشاكل طوبولوجياً المجموعة $\pi^{-1}(U_i)$ مع الضرب الطوبولوجي $U_i x F$، حيث F هي الليفة. لكن الليف (الألياف) بصفة أعمّ يمكن أن تكون متمايزة. على أي حال سنفترض دائماً أنها تتشاكل طوبولوجيا مع متنوّعة متغيّرة F، لكنها ناتجة عن تطبيق عنصر من عناصر زمرة التشاكلات الطوبولوجية G. الحالة المبتذلة هي الحالة حيث G تقتصر على عنصر الوحدة فقط. بخصوص شريط موبيوس، G هي الزمرة المتناظرة المؤلّفة من عنصرين، أحدهما هو معكوس الآخر. لكي نوصّف متنوّعة من هذا القبيل، من الواجب إذاً أن نحدّد كيفيّة تأثير هذه الزمرة طول القاعدة.

7.6 ـ نرى هنا أن سيرورة التجريد ونزع الفضأنة تظهر بالتنافس مع سيرورة إعادة إدماج الخصائص الفضائيّة، إذ إنها متصوّر جبري، زمرة التشاكلات الطوبولوجية G، التي تميّز «المليّف». يبرز هذا

التوجّه بوضوح أكثر عندما ينظر في مواضيع في الأصل جبرية، كمتنوعات: كما هو حال زُمر لي.

يجوز مماثلة زمرة في الأصل جبرية بمتنوّعة تقبل التفاضل إذا كانت مجموعة عناصرها بحيث تكون عمليّة التركيب ($(a,b)\rightarrow ab$) والاعتكاس ($a\rightarrow a^{-1}$) تطبيقين يقبلان التفاضل. ويمكن أن تبرز هذه الخاصية بوضوح أكثر في الحالة الخاصّة لزُمر التحويلات الخطّية، القابلة التمثيل في R من خلال مصفوفات تقبل الانتكاس، ففي فضاء متّجهي ثنائي البعد على R، على سبيل المثال، يمكن تمثيل زمرة التحويلات الخطّية من خلال مصفوفات من خطّيْن وعموديْن، تقبل الانتكاس، أي إنّ محدّداتها غير صفرية. زمر كهذه يمكن اعتبارها إذاً «كنقاط» متنوّعة من أربعة أبعاد، وهي هنا فضاء متجهي على R، والإحداثيات المحلّية لكلّ زمرة، كنقطة في المتنوّعة، هي معاملات المصفوفة الأربعة، فهي إذاً تقبل التغييرات اللامتناهية في الصغر، وتضفي معنى على التطبيقات الخطيّة المماسّة على التركيب والانتكاس، ونرى عندئذ المعنى الجبري لقابليّة التفاضل، المتمثل في ضرب المصفوفات ونكسها على R. والموضوع الجبري «الزمرة» أرجع إذاً إلى شكل من الفضائيّة، أو على الأقلّ يمكن النظر إليه من وجهة نظر جديدة تثريه بخصائص «فضائية».

لكنّ الحركة المعاكسة في إعادة الجبرنة تعاود الظهور بكلّ قوّتها في اقتران كلّ زمرة من زمر لي، في كونها متنوّعة، بجبر[21] أحادي التحديد، يسمح بتفحّصها. عندئذ نأخذ في الاعتبار في زمرة

(21) لنذكر بأن الجبر، بالمعنى الدقيق، هو فضاء متجهي مزوّد بتطبيق داخلي ثنائي الخطيّة. على سبيل المثال مجموعة الأعداد الحقيقيّة مزوّدة بعمليّة الجمع+ وبعمليّة الضرب × المتداولتين تشكّل جبراً. والنتيجة نفسها بخصوص متّجهات الهندسة الابتدائيّة مع «ضربها المتجهي» (جداؤها المتجهي).

لي في كونها متنوّعة تقبل التفاضل، فضاء التماسّ المتهجي G في النقطة e، العنصر المحايد في الزمرة. نزوّد هذا الفضاء المتجهي بضرب، هو عمليّة ثنائيّة الخطّية داخليّة لاتناظرية، تُدعى عقفيّة لي: $(u, v) \rightarrow [u, v]$ وتدوّن أيضاً على نحو $Ad(u)(v)$، محقّقة معادلة جاكوبي: $[u[v,w]] + [v[w,u]] + [w[u,v]] = 0$ بخصوص u, v, w في G، كما هو الحال طبيعيّاً بخصوص نتائج العقفيّات.

فضاء التماسّ في النقطة e على زمرة لي هو إذاً جبر يُدعى جبر لي، حيث بنيته تتحدّد فقط من خلال زمرته المولّدة، فالتفحّص الجبري لهذا الموضوع يسمح إذاً بدراسة خصائص زمرة لي كمتنوّعة، هذا ما بيّنه ايلي كارتان على مستوى من التعقيد التقني يتخطّى كثيراً، بالطبع، مستوى تعقيد هذا المؤلّف. مثال بسيط من جبر لي نجده في حالة الزمرة GL(E) المؤلّفة من التشاكلات التقابلية الداخليّة في الفضاء المتجهي ذي n بعداً من خلال مجموعة جزئية من الدوال الخطية L(E)، متشاكلة تقابلياً مع فضاء التماسّ على Gl(E) في عنصره المحايد، مزوّدة بالضرب الملائم. مثال آخر، هو الزمرة الخطّية SL(E)، المؤلّفة من عناصر في L(E) محددة مصفوفاتها تساوي واحداً. وجبر لي العائد لها يتألّف من العناصر التي يكون لتمثيلها المصفوفي أثر صفري[22]. وهكذا ندرك أن مفهوم جبر لي يسمح بإرجاع خصائص «هندسيّة» في المتنوّعات إلى خصائص جبريّة.

7.7 ـ يبدو لنا أن متصوّر المتنوّعة يقدّم وقتياً مرحلة نهائية في تشكّل الفكر الرياضي الفضائي. يجمع كما رأينا الخصائص الأساسيّة

(22) أثر المصفوفة المربّعة هو عدد مجموع العناصر الوتريّة في المصفوفة. التطبيق الذي يقرن بكلّ مصفوفة أثرها هو إذاً شكل خطّي على المصفوفات المربّعة ذات الرتبة n.

الحاسمة لفكرة «فضائية طبيعية». لكنّه يطرحها ويستعملها وينسّق بينها كمتصوّرات عملياتيّة مجرّدة سبق أن تكوّنت صوريّاً، وهذا ما يميّز التفكير الجبري، ففكرة اعتلام النقاط أدخلت، على سبيل المثال، بواسطة دالّة على هذا الفضاء النموذجي الذي هو R^n، أو على مجموعة باناخية بصورة أعمّ. وأقيمت فكرة الطوبولوجية، انطلاقاً من فكرة طوبولوجيّة الفضاء النموذجي R^n، وذلك من خلال التشاكل الطوبولوجي المحلي الذي تقيمه هذه الدالّة الفاردة. وفكرة المتريّة المحليّة تشتق أيضاً من تلك الدالّة، بإخضاع الإحداثيّات المحليّة لشروط قابليّة الاشتقاق، فالتطارح ههنا بين وجهة النظر الهندسيّة الحقّة ووجهة النظر الجبريّة جليّ. والعمل في الجبر، هو أن نحسب، أي نقوم بعمليّات وفق قواعد؛ والعمل في الهندسة، هو أن نبني. ولكن أحدهما في الفكر الرياضي الفضائي، لا يسير من دون الآخر. هذا من ناحية ومن ناحية أخرى، رأينا كيف أنّ متصوّرات تنتمي ذاتياً إلى التحليل، وعلى نحو مميّز متصوّر الدالّة قابلة التفاضل (وبالتوازي أيضاً متصوّر الدالّة التحليليّة الذي لم نتحدّث عنه) تؤدي دوراً جوهريّاً في بناء المتنوّعات. ذلك أنّ التحليل، حساب التفاضل والتكامل، في أصوله كما في تطوّره، هو بالذات إحدى نقاط الالتقاء الثرية بين متصوّرات شكل الفضائيّة والبنية الجبريّة. ورفضاً لكوننا قد أردنا اصطناعياً وعقائدياً فصل الفكر الفضائي عن السياق الرائع الذي تتيحه له الرياضيّات، نودّ في الخلاصة أن نتناول من جديد تبريراً لحديثنا أكثر تجريداً.

الـــخلاصــــــة

1 ـ محاولة توصيف وتحليل وتعريف فكرة فضاء رياضية ليست ادّعاء عزل جانب من النتاج الرياضي، وفصله اصطناعيّاً عن مجموعة ثريّة ثراء خارقاً، هي «مفخرة العقل البشري»... وصحيح أنّ أعظم الرياضيّين حتّى، منذ بوانكاريه لا يستطيعون اليوم الإحاطة بها على نحو كامل. إلا أنّها توجد كحقيقة عضويّة تتعاظم أبداً. في الفصول التي سبقت، أردنا أن نزيل الاعتراض الرئيسي القاضي بأن فكرة فضاء رياضيّة ستكون منقطعة عنها. وفي الخلاصة سنحاول أن نفسّر معنى ما بذلنا من جهد.

قبل كل شيء، وكما شرحنا في بداية هذا المؤلّف، لقد أهملنا عن عمد جانب الإدراك الحسّي للفضاء، الذي يطرح بوضوح مسائل معرفيّة وعمليّة هامّة، خاصّة بالفضائيّة. ومع ذلك، يتعلّق الأمر أيضاً في هذا المضمار بفكرة فضاء تركيبه وتطوّره هما قطعاً على علاقة مباشرة بالتكوّن السيكولوجي للمتصوّرات الرياضيّة الفضائيّة، فلا ندّعي بأي صورة من الصور، التظاهر بأنّنا نتجاهل أهميّة وفائدة مسائل التكوّن هذه. ولكن بالإضافة إلى كون هذه المسائل خارج كفاءَتنا تماماً، لا نزال مقتنعين، بالنظر إلى ضخامة وخصوبة المنظومة الرياضيّة العامّة، بأنّ في الإمكان ومن المشروع علوميّاً

(إبستيمولوجيّاً)، أن نبرز من منظور داخلي إن صح القول، أفكاراً رياضيّة محضة حول الفضائية.

2 ـ من وجهة النظر هذه، أوّل تبرير لانتقاء فكر رياضي فضائي (فكرة فضاء رياضية) يكون التمييز التاريخي الأصلي لنوعين من المواضيع، تحت شكل كنّا قد أضفينا عليه «صفة الطبيعي». أي، ولنكرّره، كمواضيع خصائصها غير مفكّكة بوضوح بعد، تترابط تركيبيّاً، ويمكن أن تستخدم مباشرة في تشكيل فهمنا للعالم ونعني العدد والفضاء الهندسي، ففي المصادر الإغريقيّة الرياضيّة، يتمايز بالفعل تقليد فيثاغوري وتوجّه تبرز نتائجه أوّلاً بصورة رائعة في أصول إقليدس. يولي الأول الأهميّة للعدد، والثاني يوليها لمظاهر الفضاء. ويبدو أنّ القليل اليقيني الذي نعرفه عن رياضيّات فيثاغورس، يبرز موضوع العدد، معالجاً على نحو توليفي. أما الموضوع المفضّل في أصول إقليدس، فهو قطعا الفضاء والرّسوم التي يمكن رسمها فيه. ومن دون أي رغبة في الفصل بين هذين التوجّهين الأصليّين، المتشابكين منذ البدء، من الجائز من دون شك الإقرار بأصالة الفكرة المميّزة لهذين الموضوعين «الطبيعيّين»، وبصورة خاصّة موضوع الفضاء.

3 ـ من المؤكد أن تاريخ الرياضيّات يبيّن لنا التقاءات كثيرة ومتعاقبة بين فكرة الفضاء وفكرة العدد. وبقبولنا تبسيطاً مفرطاً قطعاً لكنه حمّال معنى، نستطيع حتى أن نقول تقريباً إن كل هذا التاريخ هو بحق تاريخ التقاءات خصبة بين فكرة العدد وفكرة الفضاء.

الأوّل والرائع من هذه الالتقاءات سبق أن حصل في اليونان بين القرن الخامس والقرن الرابع، عندما قادت قضيّة قياس المقادير الهندسيّة إلى نظريّة المقادير الصمّاء (غير القياسيّة) التي انفتحت بعد عدة قرون عن تصوّر جديد للعدد. بيد أن التقاء سبق حصوله في

بوتقة الرياضيات الفيثاغوريّة، كان أقلّ حسماً لكنّه خصب من دون شك، بين العدد والفضاء، مع نظريّة الأعداد الشكليّة، وهي توفيقات فضائيّة ـ وإن مجرّدة ـ بين أعداد صحيحة تسمح بأن نستكشف منها خصائص توليفيّة وأن نعمل بواسطة جداول، عمليّات على فصائل وأنواع من الأعداد.

لكن التقاءً أساسيّاً جداً، حصل في القرن السابع عشر، هو ابتكار حساب اللامتناهي في الصغر في شكله الحديث، فمع نيوتن ولايبنتز، ووفق أسلوبين مختلفين، نجد أنّ العدد قد أصبح إن صح القول فضائياً، وهو الذي لم يعد نسبة لكنّه لم يتشكّل بعد بوضوح كعدد حقيقي. وسوف تظهر فكرتا العدد والفضاء في تاريخ الرياضيّات بعدئذ في طباق يعطي أحياناً مزيداً من القوّة في اتجاه العدد، وأحيانا أخرى في اتّجاه الفضاء. وما نطلق عليه اسم التوجّه نحو العدد ولّد، فضلاً عن ذلك، التعامل الجبري مع المواضيع، تعاملاً يشدّد على النشاط العمليّاتي المجرّد للفكر، بحيث إننا نستطيع أن نبرز في مختلف المراحل تناوباً بين رأي جبري ورأي هندسي في التطوّر الرياضي لفكرة الفضاء.

4 ـ لقد حاولنا توصيف وشرح هذا التناوب، الذي لا يمكن أن يُفهم كطمس لما هو فضائي حقاً في المتصوّر الرياضي للفضائيّة. ومع ذلك لم نتردّد في أن نستعمل في أغلب الأحيان كلمة نزع الفضأنة. لكنّ نزع الفضأنة هذا هو جدلي دائماً، بمعنى أنه، إذا نفى في البداية جانباً من المتصوّر «الطبيعي» للفضاء، يكون ذلك بهدف إعطائه لاحقاً معنى حديثاً يجدّد الهندسة بوسيلة أخرى. لقد بدا لنا فعلاً أن هذه المواجهة بين موضوعين «طبيعيّين» أصليّين كانت إحدى السيرورات الفعّالة والدائمة في تحليل بُنى مجرّدة وملازمة للفضائيّة الرياضيّة، ولإعادة البناء، انطلاقاً من هذه العناصر المجرّدة، لمتصوّر

تركيبي للفضاء، حيث مفهوم المتنوّعة قابلة التفاضل يمكن أن يكون اليوم الحالة الأكثر تقدّماً.

بهذا المعنى، يكون من المشروع إذاً أن نعترف للفكر الرياضي الفضائي باستقلاليّة، من دون أيّ تنكّر لتداخله الوثيق في السياق الحيّ لرياضيات هو جزء جوهري فيها. لكن حافزاً أكثر عمقاً من الرغبة في هذه المعرفة المختصّة هو ما يدفع دون ريب الفيلسوف إلى التعلّق بمفهوم الفضاء. هذا الحافز هو في أن الفضائيّة قد شكّلت في كلّ وقت لغزاً فلسفياً، يرتبط على نحو أكثر أو أقل وضوحاً، ووفق منظورات جدّ متنوّعة، بالتمييز بين المادّة والفكر: لماذا، إذاً، قمنا باختيار وجهة نظر رياضيّة صرفة يمكن أن تظهر قطعاً مختزلة وخادعة؟ لا يخفي الكاتب عن قارئه بأنّها قد تكون كذلك؛ لكنه يحدوه الأمل بأن هذا القارئ المتسامح والجَلود سيُخضع نفسه لبعض الوقت لهذا الحدّ الأدنى الفلسفي مثلما يُخضع نفسه لشروط صحيّة، أو تخصّص، أو تقشّف ذهني، حيث الصرامة الظاهرة لن تمنعه من أن يُعجب بغنى كون مجرّد، لكنّه حقيقي فعلاً.

كاسيوبيه، 18 كانون الثاني/ يناير 1999

ثبت المصطلحات

Abélien	أبيلي
Direction	اتّجاه
Réunion	اتّحاد
Trace d'une....	أثر
Global	إجمالي
Coordonnées curvilignes	إحداثيات قوسية
Coordonnée	إحداثية
Abscisse	إحداثية السّين أو إحداثيّة سينيّة
Involution	ارتداد
Translation	إزاحة
Permutation	استبدال
Stabilisation	استقرار/ استقرارية
Indépendance linéaire	استقلاليّة خطيّة
Continuité	استمرارية (استمرار) اتّصال (دالّة) (المعجم الموحّد)
Projection	إسقاط
Projection centrale	إسقاط مركزي
Dérivation	اشتقاق
Irrationnel	أصمّ
Atlas	أطلس

Réciprocité	اعتكاسيّة
Repérage	اعتلام (رياضيات)/ اعتلم
Fermeture	إغلاقية
Affine	أفيني
Correspondre	اقترن/ توافق/ العائد إلى، . . . وفق المقام
Restriction, reduction	اقتصار/ اختزال
Plus fin	أكثر ترفيعاً/ أكثر دقّة
Adhérence	التصاق/ انتساب
Déplacement	انتقال/ إزاحة (المعجم الموحّد)
Inversion	انتكاس (وفق القانون المعمول عليه)/ تعاكس
Appartenance	انتماء
Glissement	انزلاق
Ellipse	إهليج (تخفيف أهليلج)
Axiomatiser	بدّه
Dimension	بعديّة الفضاء أي عدد أبعاده (جمع بعد)
Modulo	بمقاس
Uniformité	بنية انتظام/ انتظاميّة
Foyer	بؤرة
Borel	بوريليّة: نسبة إلى
Ovale	بيضوي
Complétude	تامّية
Commutatif	تبادلي
Conversion	تبديل ما بين
Axiomatique	تبديه (من بدّه)/ تبديهي (صفة)
Congru modulo	تتطابق بمقاس
Abstraction	تجريد
Mobilisation	تحشيد أو حشد من فعل حشد
Analytique	تحليلي
Transformation	تحويل

Frontière	تخم (تخوم)
Hierarchisation	تدرّج/ تراتب
Progression géométrique (Raison)	تدرّج هندسي (علة)
Compacité	تدمّج/ تراصّ (المعجم الموحّد)
Compacité séquentielle	تدمُّج تسلسلي/ تراصّ تسلسلي
Connexité	ترابط
Simplement connexe	ترابط بسيط
Superposition	تراكب
Accumulation	تراكم
Ordre (ordonné)	ترتيب (مرتّب)
Ordre	ترتيب أو رتبة (وفق...)
Correspondance	ترسيل/ تراسل/ مقابلة
Raffinement	ترفيع
Composition	تركيب
Associatif	تشاركي/ تجميعي
Morphisme bijectif	تشاكل 1
Morphisme	تشكيل
Homotopie	تشويه (تشاوه)
Congruence/ Coincidence	تطابق
Orthogonalité	تعامد
Multiplicité	تعدّديّة
Différentiation	تفاضل
Différentiel exact	تفاضل صحيح
Dichotomie	تفريع ثنائي
Décomposition/ développement	تفكيك
Développement triadique	تفكيك تثليثي
Convergence	تقارب
Intersection fine	تقاطع متناهٍ/ أي تقاطع عدد محدود من...
Courbure	تقوّس/ انحناء

Evaluation	تقييم
Equivalence	تكافؤ
Intégration	تكامل
Complémentaire	تكملة
Quantification	تكميم
Incidence	تلاق/ التقاء
Homologie	تماثل
Intégrité	تماميّة
Identification	تماهٍ
Représentation	تمثيل
Symétrie	تناظر
Alternance	تناوب
Cheminement	تنقل
Récurrence	تواتر (استدلال بالتراجع) في المعجم الموحّد
Continu	تواصل أو متواصل (اسم)
Orientation	توجّه
Extention	توسّع/ توسيع
Raccordement	توصيل
Engendrement	تولّد
Combinaison	توليف
Biunivoque	ثنائي الدلالة تقابلي أو تناظر واحد لواحد حسب المقام
Algébrisation	جبرنة
Racine	جذر
Corps	جسم (بنية جبريّة)
Somme directe	جمع (مجموع) مباشر
Somme triangulaire	جمع (مجموع) مثلّثي
Somme pyramidale	جمع (مجموع) هرمي
Voisinage	جوار
Géodésique	جودز (جوادز)

Sinus	جيب
Bord	حافّة
Borne	حدّ
Borne supérieure/ inférieure	حدّ أعلى/ أدنى
Arithmétique	حسابيّات
Anneau	حلقة
Carte	خريطة
Absurdité	خلف
Fonction/ Application	دالّة/ تطبيق
Chemin	درب/ مسلك
Degré	درجة
Phénoménologie	درس أو علم الظواهر
Foncteur	دلول
Rotation	دوران
Cycle	دورة
Orocycle	دورة جبليّة
Hypercycle	دورة فائقة
Autosimilaire	ذاتي التماثل/ ذاتيّ التشابه
Ossillations	ذبذبات تأرجحات
Sommet	رأس
Ordre (equation)	رتبة
Ordinal	رتيب (رتائب)
Pavage	رصف
Support	ركيزة/ حامل
Mathématisation	روضنة
Rieman	ريماني: نسبة إلى ريمان
Angle sphérique	زاوية كرويّة
Boucle	زردة
Groupe	زمرة (زمر)

Pseudosphère	زيف كرة
Trait	سحبة
Surface	سطح
Surface développable	سطح انبساطي أو يقبل الانبساط
Chaine	سلسلة
Echelle	سلّم
Scalaire	سلميّة/ عدديّة
Flèche	سهم (سهام فئة)
Lacet	شرك
Tranche	شريحة
Rayon	شعاع
Forme	شكل
Qualitatif	صفة/ نوعي (اسم)
Dual	صنوي (صفة)/ صنوّ (اسم)
Dualité/ Dualisme	صنويّة/ ازدواجية/ ثنائية
Produit scalaire	ضرب سلّمي/ جداء عددي
Produit vectoriel	ضرب متّجهي/ جداء متّجهي
Côté	ضلع جهة
Tore	طارة
Classe	طبقة
Normal	طبيعي
Extrémité	طرف
Méthode	طريقة
Phénomène	ظاهرة
Conjecture	ظنيّة
Nombre figuré	عدد صوري/ عدد شكلي
Nombre complex	عدد عقدي
Cardinal	عديد (عديد مجموعة)/ عدد عديد (عدائد)
Clan	عشيرة

Noeud	عقدة
Infini	عناصر أو لامتناهي (اسم)
Fini	عناصر أو متناهي (اسم)
Norme (de....)	عيّار (عيار. . .)
Plongé	غاطس
Surjectif	غامر
Recouvrement	غطاء/ تغطية
Injectif	فارد
Ultramétrique	فائق المتريّة
Intervalle	فترة
Torsion	فتل
Supposition, hypothèse	فرضيّة
Séparation	فصل
Famille	فصيلة
Espace	فضاء
Espace-temps	فضاء زمان
Espace associé	فضاء مشارك/ فضاء مشرك
Espace séparé	فضاء مفصّل
Espace ambiant	فضاء مكتنف/ فضاء محيط
Spatialisation	فضأنة
Pensée de l'espace	فكرة الفضاء/ الفكر الفضائي
Catégorie	فئة
Commensurabilité	قابليّة القياس
Base	قاعدة
Tribu	قبيلة
Conjugué	قرين/ مترافق مرافق (حسب المقام)
Division harmonique	قسمة توافقيّة
Pôle	قطب
Coupure	قطع (قطوع)

Hyperbole	قطع زائد
Parabole	قطع مكافئ
Puissance	قوّة
Arc	قوس
Mesure	قياس
Commensurable	قياسي
Valeur moyenne	قيمة وسطى
Densité	كثافة
Sphère	كرة
Fractal	كسراء
Totalité	كلّية
Quantitatif	كمّي (اسم)
Indivisible	لا يقبل التقسيم
Invariance	لاتغيّريّة/ لامتغايرية/ صمود (في المعجم الموحّد)
Invariant	لامتغيّر/ لامتغاير (في المعجم الموحّد)
Infinitésimal	لامتناه في الصغر/ لانهائي الصغر (في المعجم الموحّد)
Pavé	لبنة (اسم)
Hélice	لولب
Lemme	مأخوذة
Oblique	مائل
Trivial	مبتذل
Axiome	مبده (مباده نظرية رياضية)
Axiome de choix	مبده الاختيار
Simplexe	مبسط
Résidu	متبقٍ/ باق
Suite	متتالية
Homogène	متجانس
Vecteur	متّجه
Inégalité	متراجحة/ متباينة

Concentriques	متراكزة موحّدة المركز
Métrisation	مترزة
Métrique	متريّة (اسم)
Série	متسلسلة
Concept	متصوّر/ تصوّر
Consécutif	متعاقب
Transitif	متعدّ
Multiplicité	متعدّدة
Emboité	متغالفة
Covariant	متغاير
Contravariant	متغاير ضديّاً
Variable	متغيّر
Discret	متقطّع
Complètement discontinu	متقطّع كلياً
Quatrième harmonique	متناسق رابع/ توافقيّة رابعة
Variété	متنوّعة
Trigonométrique	مثلّثي (المعجم الموحّد)
Domaine	مجال
Naturalité	مجانسة
Contigüe	مجاور/ لصيق
Ensemble rare	مجموعة نادرة
Asymptote	محاذي الخط المقارب
Semblable	مُحاكٍ/ مشابه
Similitude	محاكاة تشابه
Neutre	محايد
Convexe	محدّب
Déterminant	محدّدة
Local	محلّي
Axe	محور

Entourage	محيط/ جوار
Module	مدال (أمدلة)/ نظم
Conique	مخروطية
Filtre	مرشح
Ultrafiltre	مرشح أقصى
Composante	مركّبة
Centre de gravité	مركز الثقالة/ مركز الثقل
Aire	مساحة
Distance	مسافة
Induit	مُستقرأ أو مُسقط (وفق . . .)
Plan	مسطّح
Plan	مسطّح مستو (المعجم الموحّد)
Postulat	مسلّمة
Matrice	مصفوفة
Argument	مضمون/ برهان/ حجّة
Théamisation	مضمونية/ تضمين
Normale	معامد (اسم)
Coefficient	معامل
Repère	معلم/ مرجع
Généralisée	معمّمة
Standard	معياري
Fermé	مغلقة (اسم)
Paradoxe	مفارقة
Différentiel	مفاضل تفاضليّ (في المعجم الموحّد)
Ouvert	مفتوحة
Singulier	مفرد (منفرد)
Bijectif	مُقابل
Correspondance biunivoque	مقابلة واحداً لواحد
Approximation	مقاربة

Grandeur	مقدار
Segment	مقطع/ قطاع
Segment parabolique	مقطع أو قطاع مكافئ
Intégral	مكامل/ تكامل
Analogie	مماثلة
Tangent	مماسّ
Caractéristique	مميّزة (اسم)
Aplati	منبسط/ مسطّح (صفة)
Uniforme	منتظم
Limite	منتهى
Dégénéré	منحلّ/ مضمحلّ
Courbe	منحن
Courbe gauche	منحن أو منحنى يساري
Rationnel	منطّق/ نسبيّ (عدد)
Logique de second ordre	منطق الرتبة الثانية
Méréologie	منطق قويم
Transposé	منقولة (اسم)
Inverse	منكوس (بخصوص قانون ضرب) عكس
Paradigmes	موازين
Tenseur	موتّر
Opérateur (linéaire)	مؤثّر (خطّي)
n -Indice n	مؤشر
Générateur	مولّد
Méta	ميتا
Despatialisation	نزع الفضأنة
Rapports de grandeurs	نسب مقادير
Rapport anharmonique	نسبة متصالبة/ لاتناسقية
Relativité	نسبيّة
Texture	نسيج تركيبة

Régulier	نظامي/ منتظم
Théorie des graphes	نظرية البيانات
Origine	نقطة الأصل أو الأصل أو المصدر
Point isolé	نقطة منعزلة
Type	نمط
Fin	نهاية
Méridien	هاجرة
Polyèdre (Angle)	هرميّة (زاوية) زاوية متعدّدة السطوح
Géométrie imaginaire	هندسة تخيّليّة/ هندسة عقدية
Pangéométrie	هندسة شاملة
Géométrie absolue	هندسة مطلقة
Identité	هويّة/ مماهاة/ وفق المقام
Unitaire	واحدي
Diagonale	وتر/ قطر
Face	وجهه (المعجم الموحّد)
Unité	وحدة
Monodromie	وحدنة المسير
Univoque	وحيد الدلالة
Unimodulaire	وحيد النموذج
Paramètre	وسيط
Séparable	يقبل التفصيل
Intégrable	يقبل التكامل
Dénombrable	يقبل العدّ
Mesurable	يقبل القياس/ مقيس
Métrisable	يقبل المتريّة

المراجع

1 ـ العربية

إدريس، سهيل. **المنهل**. بيروت: دار الآداب، 2000.

بوروفسكي، إ. وج. بوفاين. **معجم الرياضيات**. ترجمة علي مصطفى بن الأشهر. بيروت: أكاديميا، 1995.

معجم الرياضيات. بيروت: مكتبة لبنان، 1987.

معجم الرياضيات المعاصرة. إعداد صلاح أحمد، موفق دعبول، إلهام حمصي. بيروت: مؤسسة الرسالة، 1986.

2 ـ الأجنبية

Books

Aleksandrov, Pavel Sergeevich. *Elementary Concepts of Topology*. [n. p.: n. pb.], 1922.

Apéry, R. [et al.]. *Penser les mathématiques: Séminaire de philosophie et mathématiques*. Textes préparés et annotés par Francois Guénard et Gilbert Lelièvre. [Paris]: Seuil, 1982.

Artin, Emil. *Algèbre géométrique = [Geometric algebra]*. Traduit

par M. [Michel] Lazard. Paris: Gauthier-Villars, 1962. (Cahiers scientifiques. 27)

———. *Algèbre géométrique*. Paris: Gauthier-Villars, 1978.

Bachmann, Friedrich. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff; eine Vorlesung*. Berlin: Springer, 1959.

Bolzano, Bernard. *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*. Hrsg. von Eduard Winter [u.a.]. Stuttgart-Bad Cannstatt Frommann Holzboog, 1969-2004.

———. *Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre in vier Bänden*. Leipzig: F. Meiner, 1929-1931.

———. *Les Paradoxes de l'infini = Paradoxien des Unendlichen*. Introd., trad. de l'allemand et notes par Hourya Sinaceur. Paris: Seuil, 1993. (Sources du savoir)

———. *Paradoxien des Unendlichen*. [Leipzig: n. pb., 1920].

———. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Leipzig: Ostwald, 1905. ([Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. no. 153])

———. ———. Prag: [n. pb.], 1817.

Bonola, Roberto. *Non Euclidean Geometry*. [New York]: Dover Publications, [1955].

Bouligand, Georges. *Les Définitions modernes de la dimension*. Paris: Hermann, 1935. (Actualités scientifiques et industrielles)

Bourbaki, Nicolas. *Topologie générale*. Paris: Hermann, 1940-1949.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. *Collected Works*. Oxford: North-Holland, [n. d.].

Cavaillès, Jean. *Méthode axiomatique et formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Introduction de Jean-Toussaint Desanti; préface de Henri Cartan. [Paris]: Hermann, 1981.

———. *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*. Présentation par Bruno Huisman; suivi de In memoriam par Georges

Canguilhem. Paris: Hermann, 1994.

———. *Sur La Logique et la théorie de la science*. 3. éd. Paris: J. Vrin, 1976.

Cavalieri, Bonaventura. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bononiae: typis C. Ferronii, 1635.

Caveing, Maurice. *L'Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. [Villeneuve-d'Ascq]: Presses universitaires du Septentrion, 1998. (Histoire des sciences)

Cayley, Arthur. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge [Eng.]: The University Press, 1889-1898. 14 vols.

Chevalley, Claude. *Fundamental Concepts of Algebra*. New York: Academic Press, 1956. (Pure and Applied Mathematics; a Series of Monographs and Textbooks, 7)

Connes, Alain. *Géométrie non commutative*. Paris: InterEd., 1990.

Desargues, Girard. *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan*. Taton: Vrin, 1988.

———. ———. [Paris: s. n., 1639].

Descartes, René. *Oeuvres de Descartes*. Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Paris: J. Vrin, 1964-.

Dieudonné, Jean. *Cours de géométrie algébrique*. [Paris]: Presses universitaires de France, 1974. (Collection Sup. Le Mathématicien; 10-11)

———. *Panorama des mathématiques pures: Le Choix bourbachique*.

Efimov, Nikola. *Géométrie supérieure = Vyschaia geometriia*. [Traduit du russe par E. Makho]. Moscou: Editions Mir, 1981.

Eilenberg, Samuel and Norman Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton: Princeton University Press, 1952. (Princeton Mathematical Series; 15)

Euclide. *Les Eléments*. Paris: Presses universitaires de France, 1990-.

Favard, J. *Espace et dimension*. Paris: Albin Michel, 1971.

Fréchet, Maurice. *Les Espaces abstraits*. Paris: [s. n.], 1926.

Frege, Gottlob. *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*. [Hamburg: Meiner, 1969-1976]. 2 vols.

Godbillon, Claude. *Eléments de topologie algébrique*. Paris: Hermann, [1971].

Granger, Gilles-Gaston. *Essai d'une philosophie du style*. Ed. rev. et corrigée. Paris: O. Jacob, 1988.

———. *Formes, opérations, objets*. Paris: J. Vrin, 1994. (Mathésis; ISSN 1147-4920)

———. *Invitation à la lecture de Wittgenstein*. Aix-en-Provence: Alinéa, 1990. (De La Pensée. Domaine philosophique)

———. *La Théorie aristotélicienne de la science*. Paris: Aubier Montaigne, 1976. (Collection analyse et raisons; 22)

———. *La Vérification*. Paris: Editions Odile Jacob, 1992.

Grassmann, H. G. *Mathematische und philosophische Werke*. Leipzig: [n. pb.], 1696-1911.

Halmos, Paul Richard. *Measure Theory*. New York: Van Nostrand, 1950. (University Series in Higher Mathematics)

Hausdorff, Felix. *Grundzuge der Mengenlehre*. New York: Chelsea Publishing Company, 1914.

Hilbert, David. *Les Fondements de la géométrie*. Ed. critique avec introd. et compléments préparée par Paul Rossier. Paris: Dunod, 1971.

——— and S. Cohn-Vóssen. *Geometry and the Imagination =Grundlagen der geometrie*. Translated by P. Nemenyi. New York: Chelsea Pub. Co., 1952.

Histoire des sciences arabes. Sous la dir. de Roshdi Rashed; avec la collab. de Régis Morelon. Paris: Ed. du Seuil, 1997-.

Hurewicz, Witold and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1948.

Husserl, Edmund. *Shorter Works*. Edited by Peter McCormick and Frederick A. Elliston. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press; Brighton, Sussex: Harvester Press, 1981.

Kant, Immanuel. *Kritik der reinen Vernunft*. Herausgegeben von Raymund Schmidt. Hamburg: Felix Meiner, 1956.

———. *Oeuvres philosophiques*. Edition publiée sous la direction

de Ferdinand Alquié. [Paris]: Gallimard, 1980-1986. 3 vols. (Bibliothèque de la pléiade; 286, 317, 332)

Vol. 1: *Des Premiers écrits à la critique de la raison pure*.

Klein, Felix. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Berlin: J. Springer, 1921-1923. 3 vols.

———. *Le Programme d'Erlangen*. Préf. de Jean Dieudonné; postf. de François Russo. Sceaux: Ed. J. Gabay, 1991.

———. ———. [n. p.: n. pb.], 1881.

Lang, Serge. *Algebra*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., [1965].

Lebesgue, Henri. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au collège de France*. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars et cie, 1928.

———. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. 2e éd. rev. et augm. Paris: J. Gabay, 1989. (Les Grands classiques Gauthier-Villars, ISSN 0989-0602)

Leibniz, Gottfried Wilhelm. *Mathematische Schriften und der Briefwechsel mit Mathematikern*.

Lie, Sophus. *Theorie der transformationsgruppen*. Leipzig: B. G. Teubner, 1888-1893. 3 vols.

Mandelbrot, Benoît. *The Fractal Geometry of Nature*. Updated and Augm. New York: W. H. Freeman, 1983.

———. *Les Objets fractals: Forme, hasard et dimension*. [Paris]: Flammarion, 1984. (Nouvelle bibliothèque scientifique)

La Mathématique non standard: Histoire, philosophie, dossier scientifique. Fondements des sciences, 0295-6977, recueil d'études de Hervé Barreau... [et al.]; avec une préface de Georges Reeb; édité sous la direction de Hervé Barreau et Jacques Harthong. Paris: Editions du centre national de la recherche scientifique, 1989.

Mayer, Karl Heinz. *Algebraische Topologie*. Basel; Boston: Birkhäuser, 1989.

Nagata, Jun-iti. *Modern Dimension Theory*. New York: Interscience Publishers, 1965.

Nicod, Jean. *La Géométrie dans le monde sensible*. Préface de M.

Bertrand Russell. Paris: F. Alcan, 1924.

Pascal, Blaise. *Oeuvres complètes*. Paris: NRF; Gallimard, 1954. (Bibliothèque de la pléiade)

Patterson, Edward M'William. *Topology*. Edinburgh: Oliver and Boyd; New York, Interscience Publishers, 1956.

Pesin, Ivan Nikolaevich. *Classical and Modern Integration Theories*. Translated and Edited by Samuel Kotz. New York: Academic Press, 1970.

Poincaré, Henri. *Oeuvres*. Paris: Gauthier-Villars, 1913-1965.

———. *La Valeur de la science*. [Paris]: Flammarion, [1970]. (Science de la nature)

Pont, Jean-Claude. *La Topologie algébrique: Des Origines à Poincaré*. Préface de René Taton (Paris: Presses universitaires de France, 1974)

Rashed, Roshdi. *Mathématique et philosophie dans l'antiquité et l'âge classique*. Paris: CNRS., 1991.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. hrsg. unter Mitwirkung von Richard Dedekind, von Heinrich Weber. 2. Aufl. bearb. von Heinrich Weber. Nachträge hrsg. von M. Noether und W. Wirtinger. New York: Dover Publications, [1953].

Saccheri, Girolamo. *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, auctore Hieronymo Saccherio*. Mediolani: typis P. A. Montani, 1733.

Scholz, Erhard. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Boston; Base; Stuttgart: Bikhäuser, 1980.

Schonflies, A. *Die Entwicklung der Lehre von den Punktenmannigfaltigkeiten*. Leipzig: Teubner, 1908.

———. *Entwicklunger Mengenlehre und ihrer Anwendungen*. Berlin: [n. pb.], 1932.

Schwartz, Laurent. *Théorie des distributions*. Paris: Hermann, 1950-1951.

Sinaceur, Hourya. *Corps et modèles: Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Paris: J. Vrin, 1991.

Souriau, Jean Marie. *Géométrie et relativité*. Paris: Hermann, [1964].

Tarski, Alfred. *Logic, Semantics, Metamathematics; Papers from 1923 to 1938*. Translated by J. H. Woodger. Oxford: Clarendon Press, 1956.

———. *Logique, sémantique, métamathématique, 1923-1944*. Paris: A. Colin, 1972-.

Temple, George Frederick James. *The Structure of Lebesgue Integration Theory*. Oxford: Clarendon Press, 1971.

Veblen, Oswald. *Analysis situs*. 2d. Ed. New York: American Mathematical Society, 1931.

Vuillemin, Jules. *La Logique et le monde sensible: Etude sur les théories contemporaines de l'abstraction*. Paris: Flammarion [1971].

Weil, André. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Paris: Hermann, 1938. (Publications de l'institut mathématique de l'université de Strasbourg, 1. Actualités scientifiques et industrielles; 551)

Whitehead, Alfred North. *The Concept of Nature*. Cambridge: The University Press, 1920.

Williamson, John Hunter. *Lebesgue Integration*. New York: Holt, Rinehart and Winston, [1962].

Wittgenstein, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. préambule et notes de Gilles Gaston Granger. [Paris]: Gallimard, 1993. (Bibliothèque de philosophie)

Zaanen, Adriaan Cornelis. *Integration*. [2d Ed.] Completely Revised Edition of an Introduction to the Theory of Integration. Amsterdam: North Holland Pub. Co., 1967.

Periodicals

Appel, Kenneth and Wolfgang Haken. «Solution of the Four Color Map Problem.» *Scientific American*: vol. 237, no. 4, October 1977.

Beltrami, Eugenio. «Teoria Fondamentale Degli Spazii di Curvatura Costante.» *Annali di Matem.*: vol. 2 1868-1869.

Fréchet Maurice, «Sur Quelques points du calcul fonctionnel.» *Rend. di Palermo*: t. XXII, 1906.

Granger, Gilles-Gaston. «Le Problème de l'espace logique dans le Tractatus de Wittgenstein.» *L'Age de la science*: no. 3, 1968.

———. «Que es una metadisciplina.» *Dianoia*: vol. 32, 1983.

———. «Sur l'idée de concept mathématique «naturel».» *Revue internationale de philosophie*: 1988.

Hausdorff, Felix. «Dimension und ausser Mass.» *Mathematische Annalen*: vol. 79, 1919.

Hjelmslev, J. «Neue Begrundung der ebenen Geometrie.» *Mathematische Annalen*: vol. 64, 1907.

Jonckeere, A. «Géométrie et perception.» *Etudes d'épistémologie génétique*: vol. 5, 1958.

Koch, H. von. «Sur Une Courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire.» *Archiv fur Matematik Astronomi och Fysik*: vol. 1, 1904.

Peano, G. «Sur Une Courbe qui remplit une aire plane.» *Mathematische Annalen*: vol. 36, 1890.

Sebestik, Jan. «Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse.» *Revue d'histoire des sciences*: vol. XVII, 1964.

Sylla, Edith. «Mediaeval Concepts of the Latitude of Forms: The Oxford Calculators.» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge*: 1973.

Tonietti, Tito. «Quatro cartas de Edmund Husserl a Hermann Weyl: a influência do pensamento fenomenológico sobre a crise das ciências europeias.» *Análise: revista quadrimestral de filosofia*: vol. 1, no. 2, 1984.

Conference

Science et métaphysique: Colloque de l'académie internationale de philosophie des sciences, [Fribourg, 12-15 septembre 1973]. Paris: Beauchesne, 1976. (Bibliothèque des archives de philosophie. Nouvelle série; 22)

الفهرس

ـ ن ـ

ـ هـ ـ

ـ و ـ

ـ ي ـ